

Летняя школа стохастического анализа – 2025

Современные модели стохастической волатильности

Лекция 3: Модель Хестона

М. В. Житлухин

Содержание

1	Определение модели и основные свойства	3
2	Формула для цены опционов колл	5
2.1	Основной результат	5
2.2	Доказательство	8
2.3	Калибровка модели	18
3	Достоинства и недостатки модели Хестона	21
4	Метод Монте-Карло для модели Хестона (*)	24
	Литература	31

1. Определение модели и основные свойства

В модели Хестона процесс цены акции задается системой уравнений (относительно ЭММ при нулевой безрисковой ставке)

$$dS_t = \sqrt{V_t} S_t dW_t^1, \quad S_0 > 0, \quad (1)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \xi \sqrt{V_t} dW_t^2, \quad V_0 > 0, \quad (2)$$

где W_t^1 и W_t^2 являются коррелированными броуновскими движениями:

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt.$$

Параметры модели: $\kappa > 0$, $\theta > 0$, $\xi > 0$, $\rho \in (-1, 1)$.

Процесс V_t представляет стохастическую дисперсию и называется процессом Кокса–Ингерсолла–Росса (CIR) или процессом Феллера. Процесс $\sigma_t = \sqrt{V_t}$ представляет стохастическую волатильность.

Предложение. Система уравнений (1)–(2) имеет единственное решение (S_t, V_t) , являющееся марковским процессом, при этом процесс S_t строго положителен и является мартингалом, а процесс V_t неотрицателен.

Смысл параметров модели

Для процесса

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) + \xi\sqrt{V_t}dW_t^2$$

имеем $E V_t = \theta + (V_0 - \theta)e^{-\kappa t}$. Тогда параметрам модели Хестона можно придать следующий смысл:

- θ — долгосрочное среднее,
- κ — скорость возврата к среднему,
- ξ — “волатильность волатильности”,
- ρ — корреляция между ценой и волатильностью.

2. Формула для цены опционов колл

2.1. Основной результат

Далее будет удобнее работать с процессом логарифма цены $X_t = \ln S_t$.

Напомним, что безарбитражной ценой опциона колл считается процесс

$$V_t = E((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t) = E((e^{X_T} - K)^+ | \mathcal{F}_t).$$

В силу марковского свойства процесса (S_t, V_t) и, следовательно, процесса (X_t, V_t) , имеем

$$V_t = f(t, X_t, V_t),$$

где функцию $f(t, x, v)$ нужно найти.

Определим функции (далее $i = \sqrt{-1}$)

$$\varphi(t, x, v; u) = \exp(C(T - t, u) + D(T - t, u)v + iux),$$

$$\tilde{\varphi}(t, x, v; u) = \frac{\varphi(t, x, v; u - i)}{\varphi(t, x, v; -i)},$$

где

$$C(\tau, u) = \frac{\kappa\theta}{\xi^2} \left((\kappa - \rho\xi iu - d(u))\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g(u)e^{-d(u)\tau}}{1 - g(u)} \right) \right),$$

$$D(\tau, u) = \frac{\kappa - \rho\xi iu - d(u)}{\xi^2} \left(\frac{1 - e^{-d(u)\tau}}{1 - g(u)e^{-d(u)\tau}} \right),$$

$$d(u) = \sqrt{(\rho\xi iu - \kappa)^2 + \xi^2(iu + u^2)}, \quad g(u) = \frac{\rho\xi iu - \kappa + d(u)}{\rho\xi iu - \kappa - d(u)}.$$

Теорема (S. Heston, 1993). Цена опциона колл имеет вид $V_t = f(t, X_t, V_t)$, где

$$f(t, x, v) = e^x \tilde{\Pi}(t, x, v) - K \Pi(t, x, v),$$

и функции $\tilde{\Pi}$, Π определены по формулам

$$\Pi(t, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} \varphi(t, x, v; u)}{iu} \right) du,$$

$$\tilde{\Pi}(t, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} \tilde{\varphi}(t, x, v; u)}{iu} \right) du.$$

2.2. Доказательство

Определим новую вероятностную меру

$$d\tilde{P} = \frac{S_T}{S_0} dP.$$

Замечание. По мере $\tilde{P}$ мартингалом является процесс $1/S_t$.

План доказательства:

1. Выразить цену опциона через вероятности исполнения по мерам P и $\tilde{P}$.
2. Найти характеристические функции распределения X_T по мерам P и $\tilde{P}$.
3. Обратить характеристические функции и найти вероятности исполнения.

Шаг 1: Представление цены опциона через вероятности исполнения

Лемма 1. Цену опциона колл можно представить в виде

$$V_t = S_t \tilde{P}(S_T \geq K \mid \mathcal{F}_t) - K P(S_T \geq K \mid \mathcal{F}_t).$$

Отсюда, пользуясь марковским свойством процесса (X_t, V_t) в модели Хестона, получим, что $V_t = f(t, X_t, V_t)$ с функцией

$$f(t, x, v) = e^x \tilde{\Pi}(t, x, v) - K \Pi(t, x, v),$$

где $\Pi, \tilde{\Pi}$ – условные вероятности исполнения опциона:

$$\Pi(t, x, v) = P(X_T \geq \ln K \mid X_t = x, V_t = v),$$

$$\tilde{\Pi}(t, x, v) = \tilde{P}(X_T \geq \ln K \mid X_t = x, V_t = v).$$

Доказательство леммы 1. Имеем

$$V_t = E^P((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t) = E^P(S_T I(S_T \geq K) | \mathcal{F}_t) - K P(S_T \geq K | \mathcal{F}_t).$$

По формуле пересчета условных ожиданий для любого события $A \in \mathcal{F}$ имеем

$$\tilde{P}(A | \mathcal{F}_t) = \frac{E^P(\frac{d\tilde{P}}{dP} I_A | \mathcal{F}_t)}{E^P(\frac{d\tilde{P}}{dP} | \mathcal{F}_t)} = \frac{E^P(S_T I_A | \mathcal{F}_t)}{S_t},$$

где воспользовались тем, что $d\tilde{P}/dP = S_T/S_0$ и S_T — мартингал по мере P .
Взяв $A = \{S_T \geq K\}$, получаем утверждение леммы.

Замечание. “Формула пересчета” условных математических ожиданий:

$$E^{\tilde{P}}(X | \mathcal{F}_t) = \frac{E^P(\frac{d\tilde{P}}{dP} X | \mathcal{F}_t)}{E^P(\frac{d\tilde{P}}{dP} | \mathcal{F}_t)}.$$

Шаг 2а: Характеристические функции логарифма цены

Определим условные характеристические функции

$$\varphi(t, x, v; u) = \mathbb{E}^P(e^{iuX_T} \mid X_t = x, V_t = v),$$

$$\tilde{\varphi}(t, x, v; u) = \mathbb{E}^{\tilde{P}}(e^{iuX_T} \mid X_t = x, V_t = v).$$

Лемма 2. Выполнено соотношение

$$\tilde{\varphi}(t, x, v; u) = \frac{\varphi(t, v, x; u - i)}{\varphi(t, v, x; -i)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\tilde{\varphi}(t, x, v; u) = \frac{\mathbb{E}_{t,x,v}^P S_T e^{iuX_T}}{e^x} = \frac{\mathbb{E}_{t,x,v}^P e^{i(u-i)X_T}}{e^x} = \frac{\varphi(t, x, v; u - i)}{\varphi(t, x, v; -i)},$$

так как $\varphi(t, x, v; -i) = \mathbb{E}_{t,x,v}^P e^{X_T} = \mathbb{E}_{t,x,v}^P S_T = e^x$.

Шаг 2b: уравнение с частными производными для φ

Лемма 3. Функция φ удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\xi^2 v}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \rho \xi v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial v} - \frac{1}{2} v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0, \\ \varphi(T, x, v; u) = e^{iux}. \end{cases}$$

Доказательство следует из формулы Фейнмана–Каца и того, что процесс (X_t, V_t) имеет представление (по формуле Ито, примененной к $X_t = \ln S_t$)

$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{V_t}{2} dt + \sqrt{V_t} dW_t^1 \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t) dt + \xi \sqrt{V_t} dW_t^2. \end{aligned}$$

Замечание. Формула Фейнмана–Каца для процесса (X_t, Y_t) вида

$$\begin{aligned}dX_t &= \mu_x(t, X_t, Y_t)dt + \sigma_x(t, X_t, Y_t)dW_t^1, \\dY_t &= \mu_y(t, X_t, Y_t)dt + \sigma_y(t, X_t, Y_t)dW_t^2\end{aligned}$$

утверждает, что при “достаточно хороших” коэффициентах $\mu_x, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y$ и функции $g(x, y)$ функция

$$f(t, x, y) = E(g(X_T, Y_T) \mid X_t = x, Y_t = y)$$

является решением задачи Коши для уравнения с частными производными

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \mu_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ f(T, x, y) = g(x, y). \end{cases}$$

Шаг 2с: Сведение к уравнению Риккати

Обозначим далее $\tau = T - t$ – время до исполнения опциона.

Лемма 4. Выполнено равенство

$$\varphi(t, x, v; u) = \exp(C(\tau, u) + D(\tau, u)v + iux),$$

где функции C, D удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \rho \xi i u D - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} \xi^2 D^2 - \frac{1}{2} i u - \kappa D, \quad D(0, u) = 0,$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \kappa \theta D, \quad C(0, u) = 0.$$

Получившееся обыкновенное дифференциальное уравнение для функции D является **уравнением Риккати** с постоянными коэффициентами, т.е. уравнением вида $y' = \alpha + \beta y + \gamma y^2$.

Доказательство леммы 4. Подставляя φ такого вида в уравнение в предыдущей лемме, получаем уравнение

$$v\left(-\frac{\partial D}{\partial \tau} + \rho \xi i u D - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\xi^2 D^2 - \frac{1}{2}iu - \kappa D\right) + \left(-\frac{\partial C}{\partial \tau} + r i u + \kappa \theta D\right) = 0.$$

Если приравнять к нулю каждую скобку, то получим искомые уравнения. Как показано далее, эти уравнения имеют решения, и тогда, в силу единственности характеристической функции, получаем утверждение леммы.

Шаг 2d: решение уравнения Риккати

Зафиксируем u . Тогда имеем уравнение для $D(\tau, u)$ (штрих обозначает производную по τ)

$$D' = \alpha + \beta D + \gamma D^2, \quad D(0, u) = 0,$$

где

$$\alpha = -\frac{iu + u^2}{2}, \quad \beta = \rho \xi i u - \kappa, \quad \gamma = \frac{\xi^2}{2}.$$

Следуя общему методу решения уравнений Риккати получаем

$$D(\tau) = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{K_1 r_+ e^{r_+ \tau} + K_2 r_- e^{r_- \tau}}{K_1 e^{r_+ \tau} + K_2 e^{r_- \tau}} \right),$$

где величины r_+ и r_- являются корнями уравнения $r^2 + \beta r + \alpha\gamma = 0$, а K_1 и K_2 — константы.

Чтобы было выполнено условие $D(0, u) = 0$ возьмем $K_1 = 1$, $K_2 = -r_+/r_-$. Тогда получаем формулу для D , и, интегрируя ее, получаем C .

Шаг 3: Обращение характеристических функций

Лемма 5 (формула обращения). Пусть $\varphi(u)$ – характеристическая функция случайной величины X . Тогда

$$P(X > x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iux} \varphi(u)}{iu} \right) du.$$

Отсюда получаем

$$\Pi(t, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} \varphi(t, x, v; u)}{iu} \right) du,$$

$$\tilde{\Pi}(t, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} \tilde{\varphi}(t, x, v; u)}{iu} \right) du.$$

2.3. Калибровка модели

На практике часто калибруют модель к рыночной поверхности подразумеваемой волатильности.

Пусть имеются рыночные цены опционов колл и/или пут и соответствующие им рыночные подразумеваемые волатильности $\hat{\sigma}_{\text{imp}}(T_i, K_i)$.

Пусть $\sigma_{\text{imp}}(T_i, K_i; \Theta)$ обозначают подразумеваемую волатильность в модели с набором параметров Θ (для модели Хестона $\Theta = (V_0, \kappa, \theta, \xi, \rho)$).

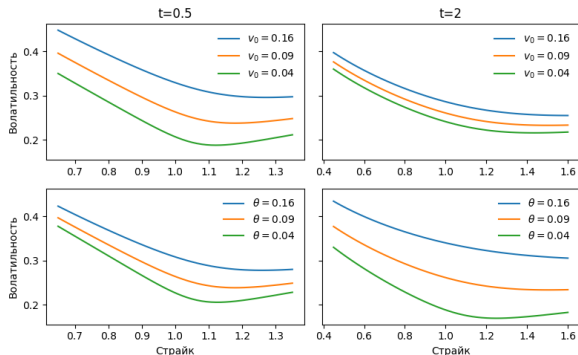
Тогда нужно решить задачу

$$\Theta^* = \arg \min_{\Theta} \sum_i (\hat{\sigma}_{\text{imp}}(T_i, K_i) - \sigma_{\text{imp}}(T_i, K_i; \Theta))^2.$$

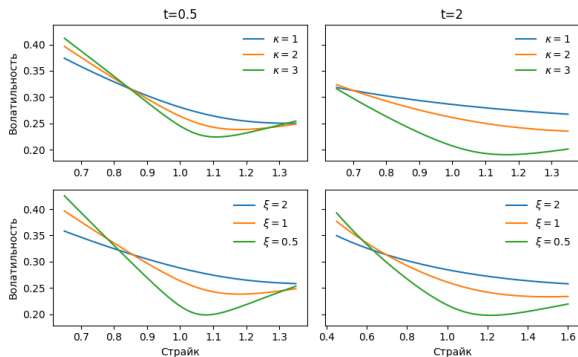
Качественная роль параметров в модели Хестона

Параметры модели оказывают следующее влияние на поверхность подразумеваемой волатильности в модели.

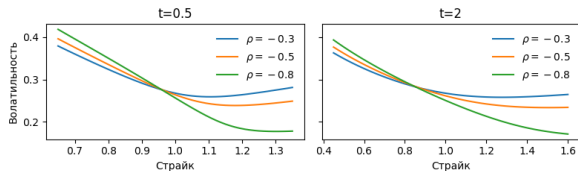
- Параметры V_0 и θ отвечают за вертикальное положение улыбок волатильности, причем V_0 больше влияет на улыбки с близким сроком исполнения, а θ — с дальним.



- Параметры κ и ξ отвечает за выпуклость улыбок.



- Параметр ρ отвечает за наклон улыбок.



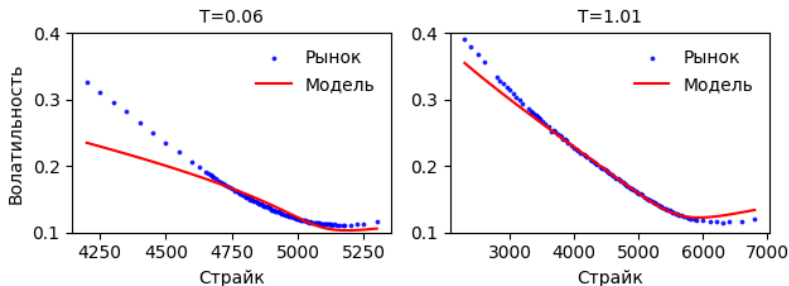
3. Достоинства и недостатки модели Хестона

Достоинства

- Простота калибровки, численного нахождения цен деривативов и симуляции.
- Возможность учесть случайность волатильности.
- Качественно более правильная динамика цен ванильных опционов, чем в модели локальной волатильности (улыбки волатильности двигаются вслед за базовым активом).

Недостатки

- **Статическая ошибка на ванильных опционах:** модель может не попадать в рыночные цены опционов или в подразумеваемые волатильности ни при каких комбинациях параметров.



На графике: пример калибровки модели одновременно к ближней (1 месяц) и дальней (1 год) улыбке волатильности на S&P 500.

- Статистически неверная динамика процесса волатильности (наблюдается распределение с более тяжелыми хвостами).
- Невозможность задать разную динамику близких и дальних улыбок волатильности (одного броуновского движения, управляющего волатильностью, оказывается мало).

4. Метод Монте-Карло для модели Хестона (*)

Пусть нужно симулировать траектории процесса (X_t, V_t) , где $X_t = \ln S_t$ (к логарифму переходят, чтобы избежать отрицательных цен при симуляции).

Заметим, что этот процесс удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}dX_t &= -\frac{1}{2}V_t^+ dt + \sqrt{V_t^+} dW_t^1, \\dV_t &= \kappa(\theta - V_t^+)dt + \xi\sqrt{V_t^+} dW_t^2.\end{aligned}$$

Стандартная **схема Эйлера**

$$\begin{aligned}X_{t_i} &= X_{t_{i-1}} - \frac{1}{2}V_{t_{i-1}}^+ + \sqrt{V_{t_{i-1}}^+} \Delta W_{t_i}^1, \\V_{t_i} &= V_{t_{i-1}} + \kappa(\theta - V_{t_{i-1}}^+) + \xi\sqrt{V_{t_{i-1}}^+} \Delta W_{t_i}^2\end{aligned}$$

оказывается не точной и требует большого числа промежуточных точек.

Схема Андерсена

Далее рассмотрим **схему Андерсена** (L. Andersen, 2008) — одну из наиболее эффективных схем симуляции для модели Хестона.

Она основана на представлении

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} - \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} V_s ds + \rho \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{V_s} dW_s^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{V_s} dW_s^2,$$
$$V_{t_i} = V_{t_{i-1}} + \kappa \theta \Delta t - \kappa \int_{t_{i-1}}^{t_i} V_s ds + \xi \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{V_s} dW_s^1,$$

где W_t^1 и W_t^2 — независимые броуновские движения.

Шаг 1: симуляция значения V_t

Известно, что

$$\text{Law}(V_{t_i} | V_{t_{i-1}} = v) = \frac{\xi^2(1 - e^{-\kappa\Delta t})}{4\kappa} \chi_d'^2\left(\frac{4\kappa e^{-\kappa\Delta t}}{\xi^2(1 - e^{-\kappa\Delta t})}v\right), \quad d = \frac{4\theta\kappa}{\xi^2},$$

где $\chi_d'^2(\lambda)$ — **нецентральное распределение хи-квадрат** с d степенями свободы и параметром нецентральности λ .

Однако симулировать из нецентрального распределения хи-квадрат трудоемко, поэтому используют следующую аппроксимацию:

- $\chi_d'^2(\lambda)$ приближается квадратом нормального распределения при большом λ ;
- $\chi_d'^2(\lambda)$ приближается экспоненциальным распределением с массой в нуле при малом λ .

Имея ввиду эту аппроксимацию,

- для “больших” значений $V_{t_{i-1}}$, положим

$$V_{t_i} = a(b + Z)^2, \quad (*)$$

где $Z \sim N(0, 1)$, и a, b — параметры, зависящие от $V_{t_{i-1}}$;

- для “малых” значений $V_{t_{i-1}}$ будем симулировать V_{t_i} из распределения

$$P(V_{t_i} = 0) = p, \quad P(V_{t_i} \in [x, x + dx]) = \beta(1 - p)e^{-\beta x} \text{ при } x > 0, \quad (**)$$

где p, β — параметры.

Параметры a, b, p, β выбираются так, чтобы получить среднее и дисперсию, как у истинного распределения $\text{Law}(V_{t_i} | V_{t_{i-1}} = v)$.

Лемма. Для распределения процесса стохастической дисперсии V_t имеем $E(V_{t_i} | V_{t_{i-1}} = v) = m(v)$, $D(V_{t_i} | V_{t_{i-1}} = v) = s^2(v)$, где

$$m(v) = \theta + (v - \theta)e^{-\kappa\Delta t}, \quad s^2(v) = \frac{v\xi^2 e^{-\kappa\Delta t}}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \frac{\theta\xi^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa\Delta t})^2.$$

Лемма. Пусть $\psi(v) = \frac{s^2(v)}{m^2(v)}$. Тогда для приближенного распределения V_t имеем $E(V_{t_i} | V_{t_{i-1}} = v) = m(v)$, $D(V_{t_i} | V_{t_{i-1}} = v) = s^2(v)$ в следующих случаях:

1. если $\psi(v) \leq 2$ и V_{t_i} вычисляется по формуле (*) с параметрами $a = \frac{m(v)}{1+b^2}$, $b^2 = \frac{2}{\psi(v)} - 1 + \sqrt{4 - 2\psi(v)}$;
2. если $\psi(v) \geq 1$ и V_{t_i} вычисляется по формуле (**) с параметрами $\beta = \frac{1-p}{m}$, $p = \frac{\psi(v)-1}{\psi(v)+1}$.

Тогда, чтобы получить V_{t_i} , воспользуемся формулой (*) при $\psi(V_{t_{i-1}}) \leq 1.5$ и формулой (**) при $\psi(V_{t_{i-1}}) \geq 1.5$.

Шаг 2: симуляция значения X_t

Из уравнений модели находим

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} - \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} V_s ds + \rho \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{V_s} dW_s^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{V_s} dW_s^2,$$
$$V_{t_i} = V_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa(\theta - V_s) ds + \xi \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{V_s} dW_s^1,$$

что влечет

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \frac{\rho}{\xi} (V_{t_i} - V_{t_{i-1}} - \kappa\theta\Delta t) \\ + \left(\frac{\kappa\rho}{\xi} - \frac{1}{2} \right) \int_{t_{i-1}}^{t_i} V_s ds + \sqrt{1 - \rho^2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{V_s} dW_s^2$$

(выразили интеграл по W_t^1 из второго уравнения и подставили в первое).

Приближим

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} V_s ds \approx V_{t_{i-1}} \Delta t, \quad \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{V_s} dW_s^2 \approx \sqrt{V_{t_{i-1}}} \Delta t \zeta_i,$$

где ζ_i — последовательность независимых и одинаково распределенных стандартных нормальных величин, не зависящих от V_s (так как интеграл по W^2 имеет условно-гауссовское распределение при фиксированной траектории V_s).

В итоге, будем симулировать X_{t_i} следующим образом:

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + C_0 + C_1 V_{t_{i-1}} + C_2 V_{t_i} + \sqrt{C_3 V_{t_{i-1}}} \zeta_i,$$

где

$$C_0 = -\frac{\rho \kappa \theta}{\xi} \Delta t, \quad C_1 = \left(\frac{\kappa \rho}{\xi} - \frac{1}{2} \right) \Delta t - \frac{\rho}{\xi}, \quad C_2 = \frac{\rho}{\xi}, \quad C_3 = (1 - \rho^2) \Delta t.$$

Литература

1. Heston S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // The Review of Financial Studies. – 1993. – V. 6. – No. 2. – P. 327-343.
2. Andersen L. Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model // Journal of Computational Finance. – 2008. – V. 11. – No. 3.