

Летняя школа стохастического анализа – 2025

Современные модели стохастической волатильности

Лекция 5: Модель локальной волатильности Басса

М. В. Житлухин

Содержание

1	Описание модели	3
2	Конструкция Басса	6
2.1	Конструкция на первом отрезке	8
2.2	Конструкция на промежуточных полуинтервалах	11
2.3	Склейка процесса	14
2.4	Численный алгоритм	16
2.5	Связь с оптимальным транспортом	18
	Литература	20

1. Описание модели

В модели локальной волатильности, основанной на **конструкции Басса** (Conze, Henry-Labordere, 2021), цена акции представлена непрерывным процессом

$$S_t = f(t, W'_t), \quad (1)$$

где W' — “просто устроенный” процесс, а функция $f(t, x)$ подбирается так, чтобы **воспроизвести цены ванильных опционов** с временами исполнения T_1, T_2, \dots, T_n для всех страйков $K > 0$.

В силу результатов лекции 2, задача выбора функции f эквивалентна нахождению процесса S_t вида (1) со свойствами:

1. S_t — непрерывный мартингал,
2. $\text{Law}(S_{T_i}) = \mu_i$ для заданного семейства вероятностных мер $\mu_i, i = 1, \dots, n$.

Необходимое условие для существования процесса цены

Определение. Говорят, что вероятностные меры μ и ν на \mathbb{R} находятся в **отношении выпуклого порядка** (обозначение: $\mu \preceq \nu$), если

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} f(x)\nu(dx)$$

для любой выпуклой функции $f(x)$, интегрируемой по μ и по ν .

Замечание. Если $\mu \preceq \nu$ и имеют конечные ожидания, то их ожидания равны, т.е. $\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\nu(dx)$ (нужно рассмотреть $f(x) = x$ и $f(x) = -x$).

Теорема (V. Strassen, 1965). Для последовательности вероятностных мер $(\mu_i)_{i=1}^n$ существует мартингал $(X_i)_{i=1}^n$ такой, что $\text{Law}(X_i) = \mu_i$, тогда и только тогда, когда $\mu_1 \preceq \mu_2 \preceq \dots \preceq \mu_n$ и эти меры имеют конечные ожидания.

Предположения

Далее будем предполагать, что задана последовательность моментов времени

$$0 < T_1 < \dots < T_n$$

и последовательность вероятностных мер на \mathbb{R}_+ (задающих желаемые распределения величин S_{T_i})

$$\mu_1 \preceq \dots \preceq \mu_n$$

такая, что каждая мера μ_i абсолютна непрерывна, имеет компактный носитель $[a_i, b_i]$, а ее плотность отделена от нуля и ограничена на (a_i, b_i) .

Положим $S_0 = \int_{\mathbb{R}} x \mu_i(dx)$.

Замечание. Из предположений следует, что функции распределения F_{μ_i} и квантильные функции $F_{\mu_i}^{-1}$ удовлетворяют условию Липшица.

2. Конструкция Басса

План

Пусть W — броуновское движение. Конструкция функции f и процесса W' будет дана в три этапа:

1. на отрезке $[0, T_1]$ построим функцию $f_0(t, x)$ и мартингал

$$S_t^0 = f_0(t, W_t)$$

такой, что $S_{T_1}^0 \sim \mu_1$;

2. на каждом полуинтервале $(T_i, T_{i+1}]$ построим функцию $f_i(t, x)$ и мартингал

$$S_t^i = f_i(t, \xi_i + W_t - W_{T_i})$$

такой, что $S_{T_{i+1}}^i \sim \mu_{i+1}$, где ξ_i — \mathcal{F}_{T_i} -измеримая случайная величина, которую нужно найти;

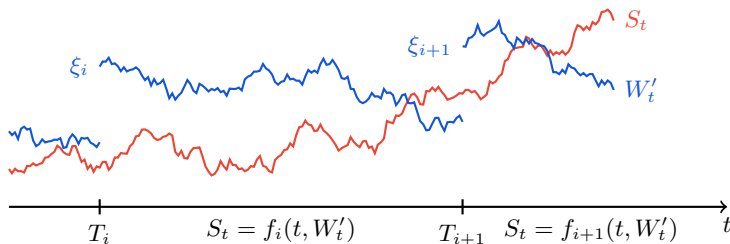
3. покажем, что можно выбрать ξ_i так, что $S_{T_i}^{i-1} = S_{T_i}^i$.

Тогда процесс W' будет иметь вид (с обозначением $T_0 = 0, \xi_0 = 0$)

$$W'_0 = 0, \quad W'_t = \xi_i + W_t - W_{T_i} \text{ при } t \in (T_i, T_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1,$$

а функция $f(t, x)$ будет иметь вид

$$f(0, x) = S_0, \quad f(t, x) = f_i(t, x) \text{ при } t \in (T_i, T_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1.$$



2.1. Конструкция на первом отрезке

Лемма. Пусть F — функция распределения на \mathbb{R} , имеющая однозначную обратную функцию $F^{-1}: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

1. если U имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, то $F^{-1}(U) \sim F$;
2. $X \sim F$ тогда и только тогда, когда $F(X) \sim U[0, 1]$.

Доказательство

Первое утверждение: для любого x такого, что $0 < F(x) < 1$, имеем

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

Второе утверждение:

$$\begin{aligned} X \sim F &\iff P(X \leq x) = F(x) \iff \\ &\iff P(X \leq F^{-1}(a)) = a \iff P(F(X) \leq a) = a. \end{aligned}$$

Идея конструкции

- Найдем функцию $h(x)$ такую, что $h(W_{T_1}) \sim \mu_1$, и зададим

$$S_t = \mathbb{E}(h(W_{T_1}) \mid \mathcal{F}_t^W), \quad t \in [0, T_1].$$

- Из телескопического свойства условного ожидания следует, что S_t — мартингал, а из марковского свойства броуновского движения получаем представление $S_t = f_0(t, W_t)$, где

$$f_0(t, x) = \mathbb{E}(h(W_{T_1}) \mid W_t = x).$$

Непрерывность S_t следует из того, что любой мартингал относительно броуновской фильтрации непрерывен.

- Согласно лемме, можно взять $h(x) = F_{\mu_1}^{-1}(\Phi_{T_1}(x))$, где Φ_{T_1} — нормальная функция распределения с дисперсией T_1 .

Предложение. Определим функцию $f_0(t, x): [0, T_1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$f_0(t, x) = E(F_{\mu_1}^{-1}(\Phi_{T_1}(W_{T_1})) | W_t = x).$$

Тогда $\text{Law}(S_{T_1}) \sim \mu_1$ и $S_t = f_0(t, W_t)$, $t \in [0, T_1]$, является непрерывным мартингалом.

Замечание

Функцию f_0 можно представить в виде

$$f_0(t, \cdot) = \varphi_{T_1-t} * (F_{\mu_1}^{-1} \circ (\varphi_{T_1} * F_0)),$$

где “ \circ ” — композиция функций, “ $*$ ” — свертка, φ_t — плотность нормального распределения с нулевым средним и дисперсией t , а $F_0(x) = I(x \geq 0)$ — функция распределения константы 0.

(При этом будем считать, что $(\varphi_0 * g)(x) = g(x)$ для любой функции g .)

2.2. Конструкция на промежуточных полуинтервалах

Для полуинтервала $(T_i, T_{i+1}]$ введем оператор \mathcal{A}_i на функциях распределения:

$$\mathcal{A}_i F = F_{\mu_i} \circ (\varphi_{T_{i+1}-T_i} * (F_{\mu_{i+1}}^{-1} \circ (\varphi_{T_{i+1}-T_i} * F))).$$

Замечание. В вероятностных терминах имеем

$$\mathcal{A}_i F(x) = F_{\mu_i}(\mathbb{E}(F_{\mu_{i+1}}^{-1}(\tilde{F}(x + W_{T_{i+1}} - W_{T_i})))),$$

где $\tilde{F} = \varphi_{T_{i+1}-T_i} * F$ — функция распределения величины $\xi + W_{T_{i+1}} - W_{T_i}$, где $\xi \sim F$ не зависит от W .

Предложение. Существует непрерывная функция распределения, являющаяся решением уравнения

$$\mathcal{A}_i F = F.$$

Идея доказательства

1. Сначала покажем, что \tilde{F} является липшицевой функцией с константой, не зависящей от F , откуда следует, что $\mathcal{A}_i F$ является липшицевой функцией с (другой) константой, не зависящей от F .
2. Рассмотрим пространство $C(\mathbb{R})$ с нормой равномерной сходимости и подмножество $\mathcal{E} \subset C(\mathbb{R})$, состоящее из функций распределения.
3. Множество \mathcal{E} выпукло и замкнуто, а $\mathcal{A}_i \mathcal{E}$ состоит из функций распределения, являющихся липшицевыми с одной и той же константой. По теореме Арцела–Асколи $\mathcal{A}_i \mathcal{E}$ предкомпактно.
4. Оператор \mathcal{A}_i непрерывен, поэтому по теореме Шаудера существует неподвижная точка $F = \mathcal{A}_i F$.

Предложение. Пусть F_i^* — любое решение уравнения $\mathcal{A}_i F = F$. Определим

$$f_i(t, \cdot) = \varphi_{T_{i+1}-t} * (F_{\mu_{i+1}}^{-1} \circ (\varphi_{T_{i+1}-T_i} * F_i^*)), \quad t \in [T_i, T_{i+1}].$$

Тогда для любой $\mathcal{F}_{T_i}^W$ -измеримой случайной величины $\xi_i \sim F_i^*$ процесс

$$S_t = f_i(t, \xi_i + W_t - W_{T_i})$$

является непрерывным мартингалом на $[T_i, T_{i+1}]$ и $S_{T_{i+1}} \sim \mu_{i+1}$.

Доказательство. Имеем

$$f_i(T_{i+1}, x) = F_{\mu_{i+1}}^{-1}(\tilde{F}_i^*(x)), \quad \tilde{F}_i^*(\xi_i + W_{T_{i+1}} - W_{T_i}) \sim U.$$

Следовательно, $S_{T_{i+1}} = F_{\mu_{i+1}}^{-1}(\tilde{F}_i^*(\xi_i + W_{T_{i+1}} - W_{T_i})) = F_{\mu_{i+1}}^{-1}(U) \sim \mu_{i+1}$.

Мартингальность доказывается так же, как для конструкции на $[0, T_1]$.

2.3. Склейка процесса

Рассмотрим момент T_i . В силу сделанных предположений, функции

$$g_i(x) := f_i(T_i, x) : \mathbb{R} \rightarrow (a_{i+1}, b_{i+1})$$

непрерывны и строго монотонны, поэтому существуют обратные

$$g_i^{-1}(x) : (a_{i+1}, b_{i+1}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Определим по индукции последовательность случайных величин

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_i = g_i^{-1}(f_{i-1}(T_i, \xi_{i-1} + W_{T_i} - W_{T_{i-1}}))$$

и определим процесс S_t с заданным начальным условием S_0 и

$$S_t = f_i(t, \xi_i + W_t - W_{T_i}), \quad t \in (T_i, T_{i+1}].$$

В силу выбора ξ_i процесс S_t непрерывен.

Предложение. Процесс S_t является непрерывным мартингалом и $S_{T_i} \sim \mu_i$.

Доказательство

Достаточно показать, что функции распределения F_{ξ_i} построенных величин ξ_i являются решением уравнение $\mathcal{A}_i F = F$:

$$F_{\mu_i}(\mathbb{E}(F_{\mu_{i+1}}^{-1}(\tilde{F}_{\xi_i}(x + W_{T_{i+1}} - W_{T_i})))) = F_{\xi_i}(x).$$

По лемме это эквивалентно тому, что

$$\begin{aligned} F_{\mu_i}(\mathbb{E}(F_{\mu_{i+1}}^{-1}(\tilde{F}_{\xi_i}(\xi_i + W_{T_{i+1}} - W_{T_i})) | \xi_i)) &\sim U \\ \iff \mathbb{E}(F_{\mu_{i+1}}^{-1}(\tilde{F}_{\xi_i}(\xi_i + W_{T_{i+1}} - W_{T_i})) | \xi_i) &\sim \mu_i \\ \iff g_i(\xi_i) \sim \mu_i \iff f_{i-1}(T_i, \xi_{i-1} + W_{T_i} - W_{T_{i-1}}) &\sim \mu_i, \end{aligned}$$

а последнее равенство верно по индукции.

2.4. Численный алгоритм

Основная работа при построении модели Басса состоит в решении уравнения

$$\mathcal{A}_i F = F.$$

В работе Acciaio, Marini, Rammer (2023) показано, что если меры μ_i достаточно “хорошие”, то

$$F_i^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}^n F$$

для любой “хорошей” функции распределения F (можно взять нормальное распределение).

Замечание. Если F_i^* — решение уравнения $\mathcal{A}_i F = F_i^*$, то $\tilde{F}_i^*(x) = F_i^*(x + c)$ тоже будет решением для любой константы c , поэтому численно удобно искать распределение F_i^* “сосредоточенным вокруг 0”.

- Будем представлять распределение F массивом значений $\bar{F}_k = F(x_k)$ в точках $x_k = k\Delta x$, где $k = -m, \dots, m$, а $m\Delta x$ выберем “достаточно большим” по отношению к значениям W_{T_i} (например, 5 стандартных отклонений).
- Плотность $\varphi_{T_{i+1}-T_i}$ будем представлять массивом $\bar{\varphi}_k = \varphi_{T_{i+1}-T_i}(x_k)$.
- Тогда одна итерация алгоритма состоит в вычислении массива

$$\overline{\mathcal{A}F} = F_{\mu_i}(\bar{\varphi} * (F_{\mu_{i+1}}^{-1}(\bar{\varphi} * F))),$$

где F_{μ_i} и $F_{\mu_{i+1}}^{-1}$ применяются к массивам поэлементно, а “*” обозначает свертку двух массивов:

$$(x * y)_k = \sum_{j=-m}^m x_j y_{k-j}$$

(считаем, что $y_l = y_{-m}$ при $l < -m$ и $y_l = y_m$ при $l > m$).

2.5. Связь с оптимальным транспортом

Пусть $\mu \preceq \nu$ — вероятностные меры на \mathbb{R} с конечными вторыми моментами, причем мера μ имеет плотность.

Задача (динамического) **мартингального оптимального транспорта**: найти согласованный измеримый процесс $\sigma_t \in \mathcal{L}_T^2$ такой, что мартингал

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

имеет распределения $X_0 \sim \mu$, $X_1 \sim \nu$ и минимизирует функционал

$$R(X) = \mathbb{E} \int_0^1 (\sigma_t - 1)^2 dt. \quad (*)$$

Замечание. Смысл задачи — найти мартингал с заданным начальным и конечным распределением, который “наиболее близок” к броуновскому движению.

Теорема (Backhoff-Veraguas et al., 2020). Пусть существует монотонная функция $f(t, x)$ и процесс $W'_t = \xi + W_t$, где ξ не зависит от W , такие что $X_t := f(t, \xi + W_t)$ является мартингалом с распределениями $X_0 \sim \mu$ и $X_1 \sim \nu$.

Тогда X является решением задачи (*).

Следовательно, конструкция Басса решает задачу мартингального оптимального транспорта (*).

Литература

1. Conze A., Henry-Labordere P. Bass construction with multi-marginals: Lightspeed computation in a new local volatility model // SSRN 3853085. – 2021.
2. Acciaio B., Marini A., Pammer G. Calibration of the Bass local volatility model // arXiv:2311.14567. – 2023.
3. Backhoff-Veraguas J., Beiglböck M., Huesmann M., Källblad S. Martingale Benamou–Brenier: A probabilistic perspective // Annals of Probability. – 2020. – V. 48. – No. 5. – P. 2258-2289.