Летняя школа стохастического анализа – 2025

Современные модели стохастической волатильности

Лекция 4: Модель локальной стохастической волатильности

М. В. Житлухин

Содержание

1. Локальная стохастическая волатильность

1.1. Функция левериджа

Модель локальной стохастической волатильности (ЛСВ) имеет вид

$$dS_t = \sigma_t \ell(t, S_t) S_t dW_t,$$

где σ_t — процесс стохастической волатильности, $\ell(t, s)$ — функция левериджа.

Например, модель ЛСВ на основе модели Хестона:

$$\begin{aligned}
dS_t &= \sqrt{V_t} \ell(t, S_t) S_t dW_t^1, \\
dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \xi \sqrt{V_t} dW_t^2, \\
dW_t^1 dW_t^2 &= \rho dt.
\end{aligned}$$

Основная задача — выбор функции левериджа.

Идея ЛСВ состоит в том, чтобы “подправить” модель стохастической волатильности с “хорошей” динамикой и устранить статическую ошибку:

1. сначала калибруется модель стохастической волатильности и фиксируются ее параметры,
2. затем вычисляется функция левериджа, обеспечивающая равенство модельных и рыночных цен ванильных опционов.

Чтобы реализовать пункт 2, будем использовать тот факт, что поверхность цен опционов можно воспроизвести моделью локальной волатильности

$$dS_t = \sigma_{\mathrm{loc}}(t, S_t) S_t dW_t,$$

где функция $\sigma_{\mathrm{loc}}(t, s)$ вычисляется по формуле Дюпира.

1.2. Связь локальной и стохастической волатильности

Предложение. Пусть мартингалы S_t и $\widehat{S}_t$ удовлетворяют уравнениям

$$dS_t = b_t S_t dW_t, \qquad S_0 = s_0 > 0,$$
$$d\widehat{S}_t = \widehat{b}(t, \widehat{S}_t)\widehat{S}_t dW_t, \qquad \widehat{S}_0 = s_0.$$

Тогда условие

$$\mathrm{E}(S_T - K)^+ = \mathrm{E}(\widehat{S}_T - K)^+ < \infty \text{ для всех } T \in (0, T_{\mathsf{max}}], \ \ K > 0$$

равносильно условию

$$\widehat{b}^2(t, S_t) = \mathrm{E}(b_t^2 \mid S_t) \text{ п.н. для п.в. } t \in [0, T_{\max}].$$

(Таким образом, локальная волатильность — это условное ожидание стохастической волатильности.)

Доказательство

Обозначим $C(T,K) = \mathrm{E}(S_T - K)^+$. Тогда (см. лекцию 2)

$$C(T,K) = (S_0 - K)^+ + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\,L_T^K(S).$$

Следовательно, для любой гладкой функции $h(s)$ с компактным носителем

$$\int_{\mathbb{R}_+} h(K)C(T,K)dK = \int_{\mathbb{R}_+} h(K)(S_0 - K)^+ dK + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\int_0^T h(S_t)b_t^2 S_t^2 dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+} h(K)(S_0 - K)^+ dK + \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{E}(h(S_t)\,\mathrm{E}(b_t^2 \mid S_t)S_t^2)dt.$$

Аналогично,

$$\int_{\mathbb{R}_+} h(K)C(T,K)dK = \int_{\mathbb{R}_+} h(K)(S_0 - K)^+ dK + \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{E}(h(\widehat{S}_t)\widehat{b}^2(t,\widehat{S}_t)\widehat{S}_t^2)dt.$$

Тогда справедливость этих равенств для всех T равносильна тому, что

$$\mathrm{E}(h(S_t)\,\mathrm{E}(b_t^2 \mid S_t)S_t^2) = \mathrm{E}(h(\widehat{S}_t)\widehat{b}^2(t,\widehat{S}_t)\widehat{S}_t^2) \text{ для п.в. } t > 0,$$

а это равносильно равенству

$$\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,\mathrm{E}(\sigma_t^2 \mid S_t = s)s^2\mu_{S_t}(ds) = \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\widehat{b^2}(t,s)s^2\mu_{S_t}(ds) \text{ для п.в. } t > 0.$$

Так как h произвольна, то это равносильно совпадению подынтегральных функций μ_{S_t}-п.н., откуда и следует доказываемое утверждение.

2. Уравнение Маккина–Власова для процесса цены

2.1. Основной результат

Применительно к модели ЛСВ, возьмем $b_t = \sigma_t \ell(t, S_t)$ и $\widehat{b}(t,s) = \sigma_{\mathrm{loc}}(t,s)$, откуда следует, что

$$\ell^2(t, S_t)\,\mathrm{E}(\sigma_t^2 \mid S_t) = \sigma_{\mathrm{loc}}^2(t, S_t).$$

Таким образом, функцию левериджа нужно искать в виде

$$\ell(t,s) = \frac{\sigma_{\mathrm{loc}}(t,s)}{\sqrt{\mathrm{E}(\sigma_t^2 \mid S_t = s)}},$$

где в правую часть входит процесс S_t, который зависит от функции левериджа.

Теорема. Пусть для поверхности цен опционов $C(T,K)$ корректно определен воспроизводящий ее процесс цены с локальной волатильностью $\sigma_{\mathrm{loc}}(t,s)$.

Предположим, что существуют процессы (S_t,σ_t), удовлетворяющие системе

$$dS_t = \sigma_t \frac{\sigma_{\mathrm{loc}}(t,S_t)}{\sqrt{\mathrm{E}(\sigma_t^2 \mid S_t)}} S_t dW_t^1, \tag{1}$$

$$d\sigma_t = \alpha(\sigma_t)bt + \beta(\sigma_t)dW_t^2. \tag{2}$$

Тогда $\mathrm{E}(S_T-K)^+ = C(T,K)$ для всех T, K.

Доказательство непосредственно следует из предыдущего предложения.

Система (1)–(2) — это уравнение Маккина–Власова, т.е. его коэффициенты зависят от распределения неизвестного процесса.

Остается вопрос: когда система (1)–(2) имеет решение? (Ответ неизвестен)

2.2. Базовые факты об уравнениях Маккина–Власова

Пусть $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ — пространство вероятностных мер на $\mathbb{R}^n$ с конечным вторым моментом. Рассмотрим d-мерное броуновское движение W_t и две функции

$$a(x,\mu)\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n, \qquad b(x,\mu)\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times d}.$$

Определение. **Уравнением Маккина–Власова** (однородным) называется уравнение вида

$$dX_t = a(X_t, \mu_t^X)dt + b(X_t, \mu_t^X)dW_t, \qquad X_0 = x_0,$$

где $\mu_t^X = \mathrm{Law}(X_t)$.

Для системы (1)–(2) имеем (взяв $X_t = (S_t, \sigma_t)$)

$$a((s,\sigma),\mu) = (0, \alpha(\sigma)), \qquad b((s,\sigma),\mu) = \left(\sigma \frac{\sigma_{\mathrm{loc}}(t,s)}{\sqrt{\int_{\mathbb{R}} \sigma^2 \mu_t^{S,\sigma}(d\sigma \mid s)}} s,\ \beta(\sigma)\right).$$

Существование и единственность решения

Пусть $\mathcal{W}_2(\mu, \nu)$ обозначает расстояние Васерштейна (расстояние Канторовича) на $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathcal{W}_2(\mu, \nu) = \inf\left\{ \sqrt{\mathrm{E}\,\|X - Y\|^2} \;\middle|\; \mathrm{Law}(X) = \mu,\ \mathrm{Law}(Y) = \nu \right\}.$$

Известно, что $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), \mathcal{W}_2)$ — полное сепарабельное метрическое пространство, а сходимость по метрике $\mathcal{W}_2$ эквивалентна слабой сходимости + сходимости 2-х моментов.

Теорема. Пусть коэффициенты $a(x, \mu)$ и $b(x, \mu)$ удовлетворяют условию Липшица, т.е. существует константа C такая, что

$$\|a(x, \mu) - a(y, \nu)\| + \|b(x, \mu) - b(y, \nu)\| \leqslant C(\|x - y\| + \mathcal{W}_2(\mu, \nu)).$$

Тогда уравнение Маккина–Власова имеет единственное решение.

Замечание. В системе (1)–(2) для модели ЛСВ одна из проблем — разрывность функции

$$m(x_1,\mu) := \mathrm{E}_\mu(X_2 \,|\, X_1 = x_1) = \int_{\mathbb{R}} x_2 \mu(dx_2 \,|\, x_1) \colon \mathbb{R} \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}.$$

Пример: пусть

$$\mu_n\{(0,0)\} = \frac{n-1}{n}, \qquad \mu_n\{(1,0)\} = \frac{1}{n},$$
$$\nu_n\{(0,0)\} = \frac{n-1}{n}, \qquad \nu_n\{(1,1)\} = \frac{1}{n}.$$

Для независимых векторов $X_n \sim \mu_n$, $X_n' \sim \nu_n$ имеем $\mathrm{E}\,\|X_n - X_n'\|^2 = O(n^{-1})$, поэтому $\mathcal{W}_2(\mu_n,\nu_n) = O(n^{-1})$ при $n \to \infty$. Однако $m(1,\mu_n) - \mu(1,\nu_n) = 1$ для всех n.

Распространение хаоса

Рассмотрим последовательность систем процессов $(X^{(1,n)}, \ldots, X^{(n,n)})$, являющихся решением стохастических дифференциальных уравнений $(i = 1, \ldots, n)$

$$dX_t^{(i,n)} = a(X_t^{(i,n)}, \mu_t^n)dt + b(X_t^{(i,n)}, \mu_t^n)dW_t^i, \qquad X_0^{(i,n)} = x_0,$$

где W^i — независимые броуновские движения, и μ_t^n — эмпирическое распределение процессов $X^{(i,n)}$ в момент t, т.е.

$$\mu_t^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_t^{(i,n)}},$$

где δ — мера Дирака.

Распространение хаоса — это свойство, означающее что $\mu^n \to \mu^X$ при $n \to \infty$, где μ^X — распределение решения исходного уравнения Маккина–Власова.

Предложение. Пусть коэффициенты a, b удовлетворяют условию Липшица, а процесс $X_t^{(i)}$ является решением уравнения Маккина–Власова по броуновскому движению W^i. Тогда для любых фиксированных i и T верна оценка

$$\mathrm{E}\sup_{t\leqslant T}|X_t^{(i,n)} - X_t^{(i)}|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Замечание. В системе (1)–(2) для модели ЛСВ распространение хаоса не имеет места, так как для эмпирической меры μ^n процессов $(S_t^{(i,n)}, \sigma_t^{(i,n)})$ имеем

$$\mathrm{E}^{\mu^n}(\sigma_t^2 \mid S_t = S_t^{(i,n)}) = (\sigma_t^{(i,n)})^2,$$

и, следовательно, уравнение (1) превращается в

$$dS_t^{(i,n)} = \sigma_{\mathrm{loc}}(t, S_t^{(i,n)}) S_t^{(i,n)} dW_t^{i,1}.$$

3. Метод Монте-Карло нахождения функции левериджа

Будем работать с процессом (X_t, V_t), $X_t = \ln S_t$, заданным уравнением

$$dX_t = -\frac{1}{2} V_t \ell^2(t, X_t) dt + \sqrt{V_t} \ell(t, X_t) dW_t^1,$$
$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \xi \sqrt{V_t} dW_t^2,$$

где

$$\ell(t, x) = \frac{\sigma_{\text{loc}}(t, e^x)}{\sqrt{\mathrm{E}(V_t \mid X_t = x)}}.$$

Будем искать функцию левериджа кусочно-постоянной по времени на промежутках $[t_i, t_{i+1})$ для $t_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \ldots$

Алгоритм (Guyon, Henry-Labordere, 2013; Van der Stoep et al., 2014)

Алгоритм основан на симуляции n траекторий процесса (X_t, V_t).

Для $t \in [0, t_1)$ положим $\ell(t,x) \equiv \sigma_{\mathrm{loc}}(0, x_0)/\sqrt{V_0}$. Далее, пусть n траекторий процесса (X_t, V_t) построены до момента t_i и найдена функция $\ell(t_i, x)$.

Найдем $\ell(t_{i+1}, x)$ по следующему алгоритму.

- Продолжим траектории на $[t_i, t_{i+1})$ (один шаг в схеме Андерсена).
- Пусть $(X^{(m)}_{t_{i+1}}, V^{(m)}_{t_{i+1}})$, $m = 1, \dots, n$ — набор траекторий, упорядоченный по возрастанию координаты x. Положим

$$a_j = X^{(jM/B)}_{t_{i+1}}, \qquad j = 1, \dots, B-1,$$

где B — параметр («число урн»), причем B делит M.

- Приблизим

$$\mathrm{E}(V_{t_{i+1}} \mid X_{t_{i+1}} = x) \approx \frac{1}{M/B} \sum_{m: X_{t_{i+1}}^{(m)} \in [a_j, a_{j+1})} V_{t_{i+1}}^{(m)}, \qquad x \in [a_j, a_{j+1}).$$

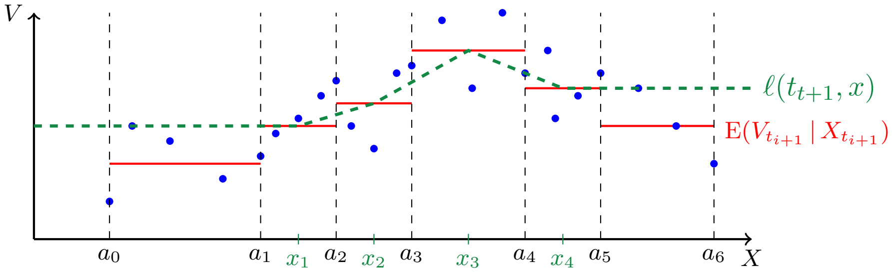
- Пусть $x_j = (a_j + a_{j+1})/2$. Использую указанное приближение, определим

$$\ell(t_{i+1}, x_j) := \frac{\sigma_{\mathrm{loc}}(t_{i+1}, e^{x_j})}{\sqrt{\mathrm{E}(V_{t_{i+1}} \mid X_{t_{i+1}} = x_j)}}, \qquad j = 1, \ldots, B-2.$$

- Интерполируем функцию $\ell(t_{i+1}, \cdot)$ линейно внутри $[a_1, a_{B-1}]$ и экстраполируем константами вне этого отрезка.

Замечание. Траектории со значениями $X_{t_{i+1}}^{(m)}$ меньше a_1 и больше a_{B-1} исключения, чтобы избежать выбросов.

Следующий рисунок иллюстрирует шаг алгоритма для нахождения $\ell(t_{i+1}, x)$.



Литература

1. Guyon J., Henry-Labordere P. Nonlinear option pricing. – CRC Press, 2013. – Ch. 10, 11.
2. Van der Stoep A. W., Grzelak L. A., Oosterlee C. W. The Heston stochastic-local volatility model: Efficient Monte Carlo simulation // International Journal of Theoretical and Applied Finance. – 2014. – V. 17. – No. 07. – 1450045.