Летняя школа стохастического анализа – 2025

Современные модели стохастической волатильности

Лекция 2: Модель локальной волатильности Дюпира

М. В. Житлухин

Содержание

1. Формула Дюпира

Мы построим модель, в которой

модельные цены ванильных опционов совпадают с рыночными.

Будем искать ее в виде

$$dS_t = \sigma_{\text{loc}}(t, S_t) S_t dW_t, \qquad (*)$$

где $\sigma_{\text{loc}}(t, s)$ — неизвестная функция, называемая локальной волатильностью.

Замечание. Далее будем всегда предполагать, что процентная ставка по безрисковому активу равна 0, а исходная вероятностная мера P уже является мартингальной. Поэтому коэффициент сноса в уравнении $(*)$ нулевой.

Определение. *Локальной волатильностью* для заданной функции $\widehat{C}(T,K)$, выражающей поверхность цен опционов колл ($T \in (0, T_{\max}]$, $K \in (0,\infty)$), называется функция $\sigma_{\mathrm{loc}}(t,s)$ такая, что для процесса S_t, удовлетворяющего уравнению $(*)$, выполнено равенство

$$\widehat{C}(T,K) = \mathrm{E}(S_T - K)^+ \quad \text{для всех } T \in (0, T_{\max}],\ K \in (0,\infty).$$

Замечание 1. Будем считать, что значения функции $\widehat{C}(T,K)$ известны для всех $T \in (0, T_{\max}]$ и $K > 0$. В реальности же доступны опционы с конечным набором параметров (T_i, K_i), поэтому нужна интерполяция и экстраполяция данных.

Замечание 2. Мы рассматриваем только опционы колл, так как опционы пут дают такую же локальную волатильность (при условии отсутствия арбитража на рынке).

Теорема (B. Dupire, 1994). Пусть $\widehat{C}(T,K)$ имеет непрерывные производные $\widehat{C}'_T$, $\widehat{C}'_K$, $\widehat{C}''_{KK}$, причем $\widehat{C}'_T(T,K) \geqslant 0$ и $\widehat{C}''_{KK}(T,K) > 0$ на $(0,T_{\max}] \times (0,\infty)$.

Для $t \in (0,T_{\max}]$, $s > 0$ определим функцию

$$\sigma_{\text{loc}}(t,s) = \sqrt{\frac{2\widehat{C}'_T(t,s)}{s^2\widehat{C}''_{KK}(t,s)}}$$

и зададим $\sigma_{\text{loc}}(0,\cdot)$ произвольным образом. Предположим, что уравнение $(*)$ имеет строго положительное решение, являющееся мартингалом.

Тогда $\sigma_{\text{loc}}(t,s)$ — локальная волатильность для $\widehat{C}$.

2. Вспомогательные результаты для доказательства

2.1. Формула Бридена–Литценбергера

Лемма 1. Для случайной величины $S \geqslant 0$ такой, что $\mathrm{E}\, S < \infty$, положим $C(K) = \mathrm{E}(S - K)^+$. Предположим, что $C''(K)$ непрерывна на $(0, \infty)$.

Тогда распределение S имеет плотность $f(s) = C''(s)$.

Доказательство

Пусть F — функция распределения S. Имеем

$$C(K) = \int_K^\infty (s - K)dF(s) = \int_K^\infty (K - s)d(1 - F(s)).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$C(K) = \lim_{b\to\infty} \left((K - b)(1 - F(b)) + \int_K^b (1 - F(s))ds \right).$$

Теперь заметим, что $\lim\limits_{b\to\infty} b(1 - F(b)) = 0$, так как

$$0 = \lim_{b\to\infty} \mathrm{E}\, S\, \mathrm{I}(S > b) \geqslant \lim_{b\to\infty} b\, \mathrm{P}(S > b) = \lim_{b\to\infty} b(1 - F(b)).$$

Тогда $C(K) = \int_K^\infty (1 - F(s))ds$, и, следовательно, $C'(K) = F(K) - 1$.

Значит, $F(s)$ непрерывно дифференцируема, причем $f(s) = C''(s)$.

Комментарий: вероятностный смысл модели локальной волатильности

Согласно формуле Бридена–Литценбергера, поверхность цен опционов колл $\widehat{C}(T,K)$ задает семейство одномерных плотностей $f_t(s) = \widehat{C}''_{KK}(T,s)$.

С другой стороны, цены опционов в модели, т.е. поверхность $C(T,K) := \mathrm{E}(S_T - K)^+$, определяются одномерными распределениями величины S_T.

Таким образом, в модели локальной волатильности

ищется процесс вида $dS_t = \sigma(t,S_t)S_t dW_t$,

имеющий заданные одномерные распределения.

2.2. Локальное время

Пусть X_t — процесс Ито вида $dX_t = \sigma_t dW_t$, заданный на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$.

Лемма 2 (формула Танаки). Для любого $a \in \mathbb{R}$ существует п.н.-единственный непрерывный согласованный неубывающий случайный процесс $L_t^a(X)$ такой, что

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)dX_s + L_t^a(X).$$

Более того, $L_t^a(X)$ можно выбрать п.н.-непрерывным по переменным (t, a).

Определение. Процесс $L_t^a(X)$ называется *локальным временем* процесса X на уровне a.

Формула Ито–Танаки–Мейера

Лемма 3. Для любой выпуклой функции $f(x)$ имеем

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a(X) f''(da),$$

где f' — правая производная.

Замечание

Любая выпуклая функция f на $\mathbb{R}$ имеет правую производную в каждой точке, причем f' не убывает и непрерывна справа. Следовательно, можно определить σ-конечную меру $\mu_f((a,b]) = f'(b) - f'(a)$, которую мы обозначаем как $f''(da)$.

Пример

Для $f(x) = (x-a)^+$, имеем $f'(x) = \mathrm{I}(x \geqslant a)$. Тогда

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathrm{I}(X_t \geqslant a)dX_t + \frac{1}{2}L_t^a(X).$$

Математическое ожидание локального времени

Лемма 4 (F. Klebaner, K. Hamza, 2022). Пусть $dX_t = \sigma_t dW_t$ — мартингал. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}$ процесс $Y_t = \int_0^t \mathrm{I}(X_t \geqslant a) dX_t$ — тоже мартингал, и

$$\mathrm{E}(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \frac{1}{2} \mathrm{E}\, L_t^a(X).$$

Формула для времени пребывания

Лемма 5. Для любой неотрицательной измеримой функции $f(x)$ верно равенство

$$\int_0^t f(X_s)\sigma_s^2 ds = \int_{\mathbb{R}} f(a) L_t^a(X) da.$$

3. Доказательство формулы Дюпира (Musiela, Rutkowski, 2006)

По лемме 4, $C(T,K) := \mathrm{E}(S_T - K)^+ = (S_0 - K)^+ + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\,L_T^K(S)$. Тогда для любой гладкой функции $h(s)$ с компактным носителем имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+} h(K)C(T,K)dK = \int_{\mathbb{R}_+} h(K)(S_0 - K)^+ dK + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\int_0^T h(S_t)\sigma^2(t,S_t)S_t^2 dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+} h(K)(S_0 - K)^+ dK + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} h(K)f(t,K)\sigma^2(t,K)K^2 dK\,dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+} h(K)\Big((S_0 - K)^+ + \frac{1}{2}\int_0^T C''_{KK}(t,K)\sigma^2(t,K)K^2 dt\Big)dK,$$

где в первом равенстве воспользовались формулой для времени пребывания, а потом формулой Бридена–Литценбергера. В силу произвольности h имеем

$$C(T,K) = (S_0 - K)^+ + \frac{1}{2}\int_0^T C''_{KK}(t,K)\sigma^2(t,K)K^2 dt.$$

Дифференцируя по T, получаем доказываемое утверждение.

Другое доказательство (нестрогое)

Б. Дюпир в своей работе использовал следующую цепочку рассуждений:

$$C'_T(T,K) = \int_K^\infty (s-K)\frac{\partial f}{\partial t}(T,s)ds = [\text{прямое уравнение Колмогорова}]$$

$$= \frac{1}{2}\int_K^\infty (s-K)\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\sigma^2 s^2 f)(T,s)ds = [\text{интегрирование по частям}]$$

$$= -\frac{1}{2}\int_K^\infty \frac{\partial}{\partial s}(\sigma^2 y^2 f)(T,s)ds$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2(T,K)K^2 f(T,K) = [\text{формула Бридена–Литценбергера}]$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2(T,K)K^2 C''_{KK}(T,K).$$

Если модель воспроизводит рыночные цены, то можно заменить C на $\widehat{C}$, что и дает доказываемую формулу.

4. Достоинства и недостатки модели локальной волатильности

Достоинства

- Отсутствие статической ошибки на ванильных опционах
- Полнота (возможность реплицировать любой дериватив портфелем, содержащим только базовый актив S_t)

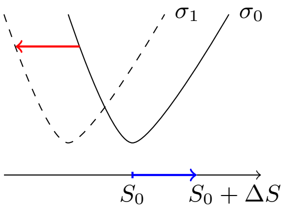
Недостатки

- Необходимость интерполяции и экстраполяции рыночных цен опционов с соблюдением условий $C'_T > 0$, $C''_{KK} > 0$
- Невозможность калибровки под цены других деривативов кроме ванильных опционов
- Полная зависимость волатильности от цены (в реальности волатильность случайна)
- Неправильная динамика цен ванильных опционов; как следствие, необходимость частой рекалибровки

Замечание (о неверной динамике цен опционов)

Цены ванильных опционов можно отождествить с их подразумеваемыми волатильностями.

В модели локальной волатильности улыбки подразумеваемой волатильности качественно двигаются в противоположную сторону от движения цены S_t:



$(\sigma_0(K) = \widehat{\sigma}(T, K)$ в момент $t = 0$ и $\sigma_1(K) = \widehat{\sigma}(T - \Delta t, K)$ в момент $t = \Delta t)$.

В реальности они двигаются в ту же сторону, что и S_t.

Литература

1. Dupire B. Pricing with a smile // Risk. – 1994. – V. 7. – No. 1. – P. 18-20.
2. Musiela M., Rutkowski M. Martingale Methods in Financial Modelling. – Springer, 2006. – Ch. 7.3.
3. Hamza K., Klebaner F. C. Expectation of local times and the Dupire formula // Stochastic Processes and their Applications. – 2022. – V. 150. – P. 782-787.