Летняя школа стохастического анализа – 2025

Современные модели стохастической волатильности

Лекция 1: Основные понятия. Модель Блэка–Шоулза

М. В. Житлухин

https://vega-education.org/courses

https://vega-education.org/research

Содержание

О чем этот курс

Мини-курс посвящен моделям, используемым для

оценки производных финансовых инструментов.

Производными инструментами (или деривативами) называются контракты, выплаты по которым зависят от изменения цен базовых инструментов.

Примеры базовых инструментов:
акции, облигации, товары, валюты, фондовые индексы и др.

Примеры производных инструментов:
опционы, форварды, фьючерсы, свопы и др.

Содержание курса

1. Основные понятия, модель Блэка–Шоулза
2. Модель локальной волатильности Дюпира
3. Модель Хестона
4. Модели локальной стохастической волатильности
5. Модель локальной волатильности Басса

1. Основные понятия

1.1. Деривативы, участники рынка, безарбитражность

Биржевые и внебиржевые деривативы

Деривативы (производные финансовые инструменты) можно разделить на

- биржевые — торгуемые на организованных биржах и имеющие публично котируемые цены,
- внебиржевые — торгуемые непосредственно между участниками рынка и требующие оценки их сторонами сделки.

В курсе будет рассматриваться задача построения модели цен базового актива и биржевых деривативов, которую можно использовать для оценки внебиржевых деривативов.

Пример биржевого деривативa

Опцион колл (или опцион пут) дает право на покупку (продажу) базового актива по заранее оговоренной цене K в определенный момент времени T.

Величина K называется страйком, а T — моментом исполнения.

(Например, для опционов на индекс S&P 500 доступны несколько тысяч разных комбинаций страйков и времени исполнения.)

Пример внебиржевого деривативa

Инструмент, выплачивающий на протяжении T лет ежегодный купон по ставке $(r + x)\%$, где r — фиксированная доходность, а x является функцией от доходности индекса фондового рынка за год.

Buy-side и sell-side

Среди участников рынка можно выделить две группы:

- buy-side (инвестфонды, частные инвесторы) — стремятся заработать на изменениях цен активов и используют деривативы для увеличения доходности портфеля и/или снижения риска.
- sell-side (инвестиционные банки) — стремятся заработать на комиссии от продажи внебиржевых деривативов, хеджируя риски, связанных с обязательствами по этим инструментам.

В этом курсе будут рассматриваться задачи, возникающие у sell-side.

Арбитраж

Арбитражем называется возможность получить безрисковый доход без вложения капитала.

Фундаментальный принцип всех теоретических моделей финансовой математики — отсутствие арбитража.

Репликация

Предположим, что некоторый инструмент может быть реплицирован путем торговли другими инструментами.

Тогда его цена должна быть равна стоимости реплицирующего портфеля, так как иначе возникнет арбитраж.

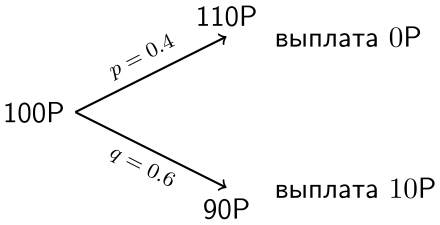
(Репликация с помощью биржевых инструментов — одна из основных задач sell-side.)

Пример

Пусть цена акции сегодня равна 100Р, а цена завтра — 110Р с вероятностью $p = 0.4$ или 90Р с вероятностью $q = 0.6$. Пусть процентная ставка на денежном рынке равна 0.

Опцион пут со страйком 100Р платит 10Р, если цена акции завтра будет 90Р, и платит 0Р, если цена акции будет 110Р.

Сколько следует заплатить за покупку такого опциона?



Решение

Реплицирующий портфель состоит из -0.5 акции и 55Р; его стоимость 5Р.

- Если цена акции будет 110Р, то стоимость портфеля составит

$$-0.5 \cdot 110 + 55 = 0.$$

- Если цена акции будет 90Р, то стоимость портфеля составит

$$-0.5 \cdot 90 + 55 = 10.$$

Таким образом, цена равна 5Р (а не 6Р).

1.2. Компоненты математических моделей рынков

Базовые активы

Пусть задано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathrm{P})$ с конечным горизонтом времени T.

Будем рассматривать модели, в которых присутствуют два базовых актива:

- безрисковый актив (денежный счет) на котором можно хранить деньги и брать с него деньги в долг;
- рисковый актив (акция), цена которой задается непрерывным согласованным случайным процессом $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$.

Для простоты будем считать, что на денежном счете нулевая процентная ставка, а акция не выплачивает дивиденды.

Производные инструменты

Производные инструменты (“европейского типа”) отождествляются со случайными величинами X, равными сумме денег, которую продавец инструмента обязан выплатить покупателю в момент времени T.

Пример: $X = (S_T - K)^+$ для “ванильного” опциона колл, $X = (K - S_T)^+$ для “ванильного” опциона пут, где K — страйк-цена.

Задача оценки инструмента X состоит в том, чтобы определить его “справедливую” цену V_t^X в моменты времени $t \in [0, T]$.

Торговые стратегии

Торговая стратегия задается случайным процессом $H = (H_t)_{t\in[0,T]}$, выражающим количество акций в портфеле в момент t.

Изменение стоимости портфеля стратегии описывается процессом

$$V_t^H = V_0^H + \int_0^t H_u dS_u,$$

где V_0^H — начальный объем денежных средств.

(Процесс H должен удовлетворять дополнительным условиям; в частности, чтобы интеграл $\int_0^t H_u dS_u$ был корректно определен.)

Эквивалентные мартингальные меры

Считается, что в любой "разумной" модели должна существовать вероятностная мера $\mathrm{Q} \sim \mathrm{P}$, называемая эквивалентной мартингальной мерой, такая, что

процесс цены S является мартингалом относительно Q.

(Если это предположение не выполнено, то в модели будут арбитражные возможности.)

Замечание. ЭММ может быть не единственной.

Основная формула оценки производных инструментов

Безарбитражная цена (справедливая цена) производного инструмента X в момент $t \leqslant T$ вычисляется по формуле

$$V_t^X = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(X \mid \mathscr{F}_t). \tag{1}$$

В частности, если $\mathscr{F}_0$ — тривиальная σ-алгебра (состоит из событий вероятности 0 или 1), то цена в начальный момент времени равна

$$V_0^X = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}\, X.$$

Замечание. Если ЭММ не единственна, то и безарбитражная цена может быть не единственной (в таком случае нужно выбрать конкретную ЭММ для дальнейших расчетов).

Калибровка модели

Параметры модели и ЭММ в ней обычно выбирают исходя из минимизации статической и динамической ошибок:

- статичная ошибка означает отличие цен биржевых инструментов в модели от их рыночных цен в начальный момент времени;
- динамическая ошибка означает отличие динамики процессов цен биржевых инструментов в модели от их рыночной динамики.

После калибровки модели на биржевых инструментах (как правило, ванильных опционах колл и пут) ее используют для вычисления цен и хеджирования рисков по внебиржевым инструментам.

Резюме раздела: математические задачи

Цель — найти мартингал $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ такой, что

1. цены европейских опционов колл и пут в модели равны (или близки) заданным рыночным ценам:
$$\mathrm{E}(S_{T_i} - K_i)^+ = \widehat{C}(T_i, K_i), \qquad \mathrm{E}(K_i - S_{T_i})^+ = \widehat{P}(T_i, K_i),$$
где $\widehat{C}, \widehat{P}$ — рыночные цены опционов, доступные для определенного набора времен исполнения и страйков (T_i, K_i);
2. процесс S_t, а также процессы цен интересующих нас деривативов имеют динамику, похожую на ту, что наблюдается в реальности.

2. Модель Блэка–Шоулза

В модели Блэка–Шоулза (F. Black, M. Scholes, R. Merton, 1973) цена акции задается геометрическим броуновским движением

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \qquad S_0 = \mathrm{const} > 0,$$

или, эквивалентно,

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}.$$

Считается, что рассматривается фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$, где фильтрация порождена процессом S_t (эквивалентно, W_t).

Эквивалентная мартингальная мера

По теореме Гирсанова существует мера $\mathrm{Q} \sim \mathrm{P}$ такая, что $W_t^{\mathrm{Q}} = W_t + \frac{\mu}{\sigma} t$ является броуновским движением относительно нее. Тогда цена является мартингалом относительно Q, так как

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t = \sigma S_t dW_t^{\mathrm{Q}}.$$

Следовательно, Q является эквивалентной мартингальной мерой.

Репликация производных инструментов

Предложение. Для любого дериватива X, $\mathrm{E}^{\mathrm{Q}} X^2 < \infty$, существует единственная стратегия $H \in \mathcal{L}_T^2$ такая, что $V_T^H = X$ п.н. При этом $V_0^H = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}} X$.

Стратегия H называется *репликирующей стратегией* для X.

Доказательство

По теореме о мартингальном представлении найдется единственный процесс $H' \in \mathcal{L}_T^2$ такой, что

$$X = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}} X + \int_0^T H'_t dW_t^{\mathrm{Q}}.$$

Тогда достаточно взять $H_t = H'_t / S_t$.

Определение. Ценой репликации дериватива X такого, что $\mathrm{E}^{\mathrm{Q}} X^2 < \infty$, называется процесс стоимости портфеля его реплицирующей стратегии:

$$V_t^X = V_t^H.$$

Предложение. Для такого инструмента X имеем

$$V_t^X = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(X \mid \mathscr{F}_t).$$

В частности, $V_0^X = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}} X$.

Доказательство. Следует из того, что V_t^H является мартингалом и $V_T^H = X$.

Замечание. Цена репликации является безарбитражной ценой в том смысле, что она не создает арбитражных возможностей на рынке. В частности, ее естественно считать справедливой ценой инструмента.

Следствие (формула Блэка–Шоулза). Цены (в момент 0) европейских опционов колл и пут в модели Блэка–Шоулза с нулевой безрисковой процентной ставкой равны

$$\begin{aligned} C &= S_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2), \\ P &= K\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\Phi(x)$ обозначает стандартную нормальную функцию распределения, и

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + T\sigma^2/2}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = \frac{\ln(S_0/K) - T\sigma^2/2}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Доказательство для опциона колл сводится к вычислению ожидания

$$C = \mathrm{E}^Q(S_T - K)^+ = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(S_0 e^{\sigma W_T^{\mathrm{Q}} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K)^+,$$

которое можно найти интегрированием по плотности W_T^{Q}.

Для опциона пут аналогично.

Реплицирующая стратегия для простых инструментов

Рассмотрим дериватив $X = f(X_T)$ с “хорошей” функцией f. В силу марковского свойства геометрического броуновского движения его цена имеет вид $V_t^X = V(t, S_t)$, где

$$V(t,s) = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(f(S_T) \,|\, S_t = s).$$

По формуле Ито имеем (учитывая, что коэффициент перед dt должен быть нулевым, так как цена — мартингал)

$$dV(t, S_t) = V_s'(t, S_t) dS_t,$$

а из определения изменения стоимости портфеля стратегии, следует что

$$dV_t = H_t dS_t.$$

Приравнивая коэффициенты при dS_t, получаем

$$H_t = V_s'(t, S_t).$$

Реплицирующая стратегия для сложных инструментов

Рассмотрим дериватив, цена которого $V_t^X = f(t, F_t)$ зависит от n-мерного процесса факторов $F_t = (F_t^1, \ldots, F_t^n)$, где

$$dF_t^i = a^i(t, F_t)dt + b^i(t, F_t)dW_t^{\mathrm{Q}}.$$

Тогда, аналогично предыдущему слайду,

$$dV(t, F_t) = \left(\sum_{i=1}^{n} b^i(t, F_t) V'_{F^i}(t, F_t)\right) dW_t^{\mathrm{Q}},$$
$$dV_t = H_t dS_t = \sigma H_t S_t dW_t^{\mathrm{Q}}.$$

Приравнивая коэффициенты при dW_t^{Q}, находим

$$H_t = \frac{1}{\sigma S_t}\left(\sum_{i=1}^{n} b^i(t, F_t) V'_{F^i}(t, F_t)\right).$$

3. Недостатки модели Блэка–Шоулза

3.1. Постоянство волатильности

В рыночных данных наблюдается изменчивость волатильности со временем. Так как цены деривативов зависят от σ, то это приводит к ошибкам в репликации, если следовать модели Блэка–Шоулза.

Как оценить параметр σ?

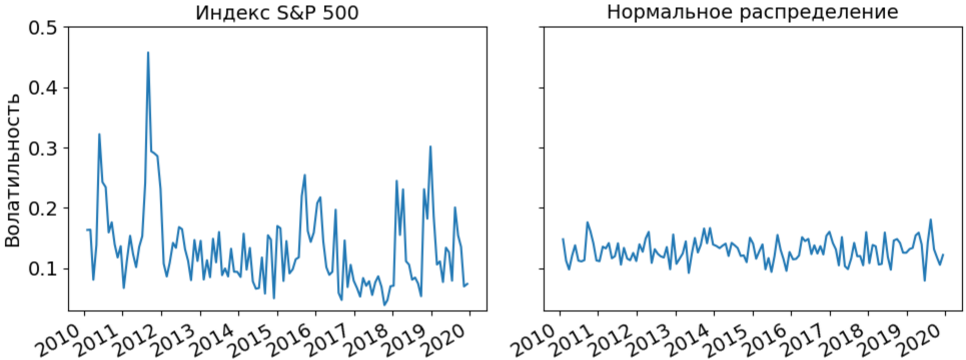
Воспользуемся тем, что для геометрического броуновского движения S_t на любом отрезка времени $[a, b]$ имеем

$$\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(\ln S_{t_i} - \ln S_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow{L^2} \sigma^2 \quad \text{при } n \to \infty,$$

если диаметр разбиения $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ стремится к 0. Это следует из того, что $\ln S_t = (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^{\mathrm{Q}}$, а квадратическая вариация броуновского движения на отрезке $[a, b]$ равна $b - a$.

Пример

Следующий график показывает, что рыночная волатильность непостоянна.



Слева: оценка волатильности индекса S&P 500.

Справа: оценка волатильности в симулированной модели с $\sigma = \mathrm{const}$.

3.2. Неверная подразумеваемая волатильность

Рассмотрим формулу Блэка–Шоулза как уравнение

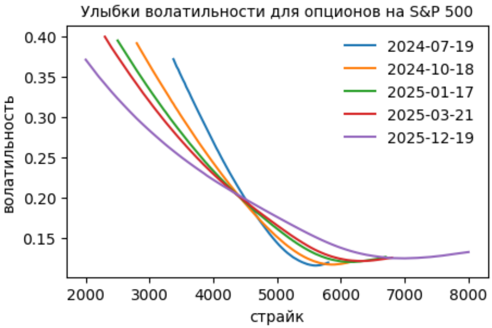
$$V = V(S, T, K, \sigma)$$

и решим его относительно σ, взяв в качестве V рыночную цену опциона.

Решение $\widehat{\sigma}$ называется подразумеваемой волатильностью опциона.

В модели Блэка–Шоулза значение $\widehat{\sigma}$ должно быть одинаковым для всех опционов (и равно параметру модели σ), независимо от T и K, но в реальности это не так.

На рисунке показаны сечения поверхности $\widehat{\sigma}(T, K)$ для разных значений T — так называемые улыбки волатильности (данные на 25.04.2024).



Типичные свойства рыночных улыбок волатильности:

- U-образная форма;
- задранный левый хвост;
- увеличение наклона при уменьшении времени до исполнения.

Простой алгоритм вычисления подразумеваемой волатильности $(*)$

Для опциона колл с ценой V введем обозначения

$$x = \ln\frac{S_0}{K}, \qquad p = \frac{V}{\sqrt{S_0 K}}, \qquad \eta = \sigma\sqrt{T}.$$

Тогда формула Блэка–Шоулза примет вид

$$p = e^{x/2}\Phi(x/\eta + \eta/2) - e^{-x/2}\Phi(x/\eta - \eta/2). \qquad (*)$$

Нетрудно видеть, что это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $\mathrm{I}(x>0)(e^{x/2} - e^{-x/2}) < p < e^{x/2}$.

Лемма. Для опциона at-the-money $(S_0 = K)$ имеем $\eta = -2\Phi^{-1}((1-p)/2)$.

Если $S_0 \neq K$, то правая часть формулы $(*)$ имеет точку перегиба $\eta_0 = \sqrt{2|x|}$ и является выпуклой при $\eta < \eta_0$ и вогнутой при $\eta > \eta_0$.

Применим метод Ньютона численного нахождения решения уравнения $f(\eta) = 0$, где f — разность правой и левой части уравнения $(*)$:

$$\eta_{n+1} = \eta_n - \frac{f(\eta_n)}{f'(\eta_n)}.$$

Предложение. $\eta_n \to \eta_*$ при $n \to \infty$, где η_* — корень уравнения $(*)$.

Таким образом, искомая подразумеваемая волатильность

$$\widehat{\sigma} = \frac{\eta_*}{\sqrt{T}}.$$

Замечание. Известно, что метод Ньютона сходится, если начальное приближение η_0 лежит справа от корня η_* и функция выпукла на $[\eta_*, \eta_0]$; или начальное приближение лежит слева от корня и функция вогнута на $[\eta_0, \eta_*]$.

Именно такие свойства обеспечивает предыдущая лемма.

4. Дополнение: сведения из теории случайных процессов

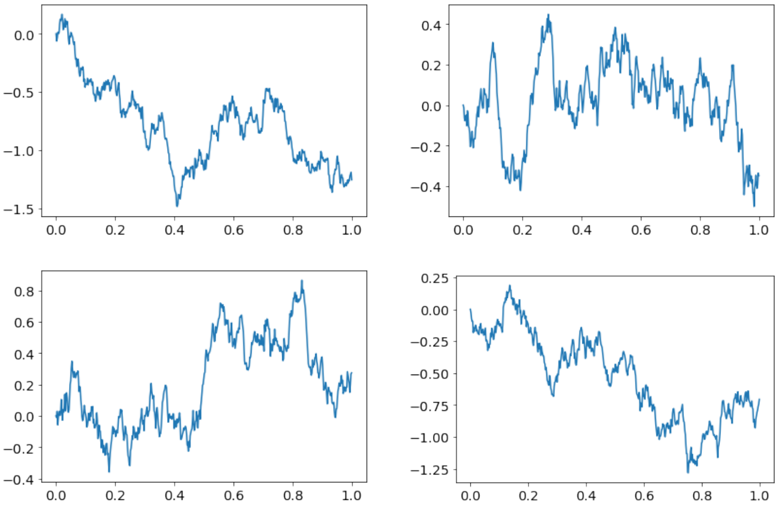
4.1. Броуновское движение

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathrm{P})$.

Определение. Броуновское движение — это случайный процесс W, согласованный с фильтрацией $\mathscr{F}_t$ (т.е. W_t — $\mathscr{F}_t$-измерима для всех t) такой, что

1. $W_0 = 0$,
2. $W_t - W_s$ не зависит от $\mathscr{F}_s$ для любых $s \leqslant t$ (независимые приращения),
3. $W_t - W_s$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $t - s$ для любых $s \leqslant t$;
4. W имеет непрерывные траектории.

Примеры траекторий броуновского движения



Мартингальное свойство

Определение. Случайный процесс X называется мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$, если

1. X согласован с $\mathbb{F}$;
2. $\mathrm{E}\,|X_t| < \infty$ для любого t;
3. $\mathrm{E}(X_t \,|\, \mathscr{F}_s) = X_s$ для любых $s \leqslant t$.

Предложение. Броуновское движение является мартингалом.

Доказательство. Свойства 1 и 2 очевидны, а свойство 3 следует из независимости приращений, так как

$$\mathrm{E}(W_t - W_s \,|\, \mathscr{F}_s) = \mathrm{E}(W_t - W_s) = 0.$$

4.2. Интеграл Ито и процессы Ито

Пусть процесс $H = (H_t)_{t\in[0,T]}$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$, измерим по паре переменных (ω, t) и $\int_0^T H_t^t < \infty$ п.н. (обозначение: $H \in \mathcal{P}_T^2$).

Тогда определен интеграл Ито по броуновскому движению

$$I_t = \int_0^t H_t dW_t,$$

являющийся непрерывным процессом, согласованным с фильтрацией $\mathbb{F}$.

Если дополнительно $\mathrm{E}\int_0^T H_t^2 dt < \infty$ (обозначение: $H \in \mathcal{L}_T^2$), то I_t является мартингалом, причем

$$\mathrm{E}\, I_t = 0, \qquad \mathrm{E}\, I_t^2 = \mathrm{E}\int_0^t H_s^2 ds$$

(для общего процесса $H \in \mathcal{P}_T^2$, интеграл I_t является локальным мартингалом).

Определение. Процессом Ито называется непрерывный согласованный процесс X_t, представимый в виде

$$X_t = X_0 + \int_0^t G_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

где G_t и H_t — измеримые и согласованные процессы, причем $\int_0^T |G_t| dt < \infty$, $\int_0^T H_t^2 dt < \infty$. Далее будем считать, что $X_0 = \mathrm{const}$.

Для краткости говорят, что процесс X имеет стохастический дифференциал

$$dX_t = G_t dt + H_t dW_t.$$

Теорема (формула Ито). Если X_t — процесс Ито, а функция $f(t,x)$ имеет непрерывные частные производные f'_t, f'_x, f''_{xx}, то процесс $Y_t = f(t, X_t)$ является процессом Ито и имеет стохастический дифференциал

$$\begin{aligned} dY_t &= f'_t(t,X_t)dt + f'_x(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(dX_t)^2 \\ &= \left(f'_t(t,X_t) + f'_x(t,X_t)G_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,X_t)H_t^2\right)dt + f'_x(t,X_t)H_t dW_t, \end{aligned}$$

где $(dX_t)^2 = H_t^2 dt$.

Пример 1

По формуле Ито для функции $f(t,x) = x^2$ и процесса $X_t = W_t$ имеем

$$dW_t^2 = 2W_t dW_t + dt,$$

что означает

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + t.$$

Таким образом,

$$\int_0^t W_t dW_t = \frac{W_t^2 - t}{2}.$$

Пример 2

Геометрическим броуновским движением называется процесс

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}, \qquad S_0 > 0,$$

где $\mu \in \mathbb{R}$ — коэффициент сноса, $\sigma > 0$ — коэффициент волатильности.

Если представить S_t в виде $S_t = f(t, W_t)$, где $f(t, x) = e^{\sigma x + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$, и применить формулу Ито, то получим

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

4.3. Теорема Гирсанова

Теорема. Пусть $W = (W_t)_{t \in [0,T]}$ — броуновское движение на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$. Тогда существует вероятностная мера $\mathrm{Q} \sim \mathrm{P}$ такая, что процесс

$$W_t^{\mathrm{Q}} = W_t + \mu t$$

является броуновским движением на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathrm{Q})$.

В явном виде мера Q задается следующим образом:

$$Q(A) = \mathrm{E}^{\mathrm{P}}(Z\,\mathrm{I}_A), \qquad Z = e^{-\mu W_T - \frac{\mu^2}{2}T},$$

где Z — это производная Радона-Никодима Q по P, т.е. $Z = d\,\mathrm{Q}\,/d\,\mathrm{P}$.

4.4. Теорема о мартингальном представлении

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ — вероятностное пространство, W — броуновское движение на нем, а фильтрация $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t^W)_{t\in[0,T]}$ порождена процессом W и пополнена по мере P.

Теорема. Пусть случайная величина X является $\mathscr{F}_T^W$-измеримой, $\mathrm{E}\,X^2 < \infty$. Тогда существует единственный процесс $H \in \mathcal{L}_T^2$ такой, что

$$X = \mathrm{E}\,X + \int_0^T H_t dW_t.$$

В частности, любой квадратично интегрируемый мартингал M_t однозначно представим в виде

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s.$$

Литература

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of political economy. – 1973. – V. 81. – No. 3. – P. 637-654.
2. Merton R. C. Theory of rational option pricing // The Bell Journal of Economics and Management Science. – 1973. – P. 141–183.
3. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. – МЦНМО, 2016.
4. Житлухин М. В. Введение в финансовую математику. – github.com/mz-100/finmath.