НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Международная лаборатория стохастического анализа

ОЦЕНКА ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ИНДЕКСА ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА

Подготовила:

Алиева Пируза Ниязи кызы

Руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Питербарг Владимир Ильич

Москва, 2020

ПЛАН ПРЕЗЕНТАЦИИ

1) Формулирование цели, задач и актуальности исследования;

2) Определение распределения вейбулловского типа;

3) Исследование вероятностей больших рисков портфелей вейбулловского типа:

- метод Лапласа,
- метод разложения вероятности.

4) Оценка вероятности разорения финансового портфеля вейбулловского типа:

- метод условного максимального правдоподобия (подход Хилла),
- непараметрический метод, основанного на общей теории статистики экстремумов.

5) Результаты численного сравнения полученных оценок путем статистического моделирования.

ЦЕЛЬ, ЗАДАЧИ И АКТУАЛЬНОСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель: асимптотическое исследование вероятности наступления большого риска финансового портфеля вейбулловского типа с получением поправочных членов к этим асимптотикам и построение статистических оценок вероятностей разорения для этого портфеля.

Актуальность: при оптимизации работы страховых и других финансовых инструментов, в частности, для ценообразования и оптимизации перестрахования, управления рисками все возрастающее значение имеет анализ и оценка вероятностей высоких рисков, ведущих к разорению пользователей этих инструментов.

Задачи:

1. Проанализировать основные подходы к оценке асимптотического поведения хвоста распределения суммы рисков вейбулловского типа.
2. Построить асимптотические разложения для вероятностей разорения (хвоста распределения) суммы рисков вейбулловского типа.
3. Рассмотреть основные положения теории статистики экстремумов.
4. Применить метод условного максимального правдоподобия (подход Хилла) и непараметрический метод, основанный на общей теории статистики экстремумов, для оценки параметров распределения финансового портфеля вейбулловского типа.
5. Провести численное сравнение полученных оценок путем статистического моделирования.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЙБУЛЛА И ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА

Распределение Вейбулла:

$$X \sim W(k, \lambda)$$

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \text{при } x \geq 0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Распределение вейбулловского типа:

- $f_i(x) \sim d_i x^{\alpha_i + \beta - 1} e^{-c_i x^{\beta}}, x \to \infty, i = 1, 2, \dots, n,$

где $\beta > 1, \alpha_i \in R, c_i, d_i > 0$ *(Asmussen, 2017).*

- $f_i(u) \sim u^{\alpha_i} \ell_i(u) e^{-u^p}, u \to \infty, i = 1, 2, \dots, n,$

где $p > 1, \alpha_i \in R, \lim\limits_{u \to \infty} \frac{\ell_i(tu)}{\ell_i(u)} = 1$ *(Farkas, 2017).*

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ РИСКОВ ПОРТФЕЛЕЙ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА

Рассмотрим финансовый портфель (V), состоящий из двух активов ξ_1 и ξ_2 с весами θ и $(1-\theta)$ соответственно: $V = V(\theta; \xi_1, \xi_2) = \theta\xi_1 + (1-\theta)\xi_2$, где $\theta \in (0;1)$. Риски распределены на $[0; +\infty)$ с плотностями вида:

$$\boldsymbol{h_i(x) = C_i(x) x^{\alpha_i} e^{-L_i x^{p_i}}},$$

где $p_i > 1, L_i > 0, \alpha_i > -1, C_i(x)$: $C_i(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} C_i, \xi_1$ и ξ_2- независимы, $i = 1{,}2$.

p_i - экстремальный индекс распределения (параметр формы).

Исследуем вероятность наступления крупного риска, вероятность разорения финансового портфеля:

$$\boldsymbol{p(u) := P\{V(\theta; \xi_1, \xi_2) \geq u\} = P\{\theta\xi_1 + (1-\theta)\xi_2 \geq u\}, u \to \infty}$$

МЕТОД ЛАПЛАСА

Интеграл Лапласа:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) \exp\{\lambda S(x)\}\, dx$$

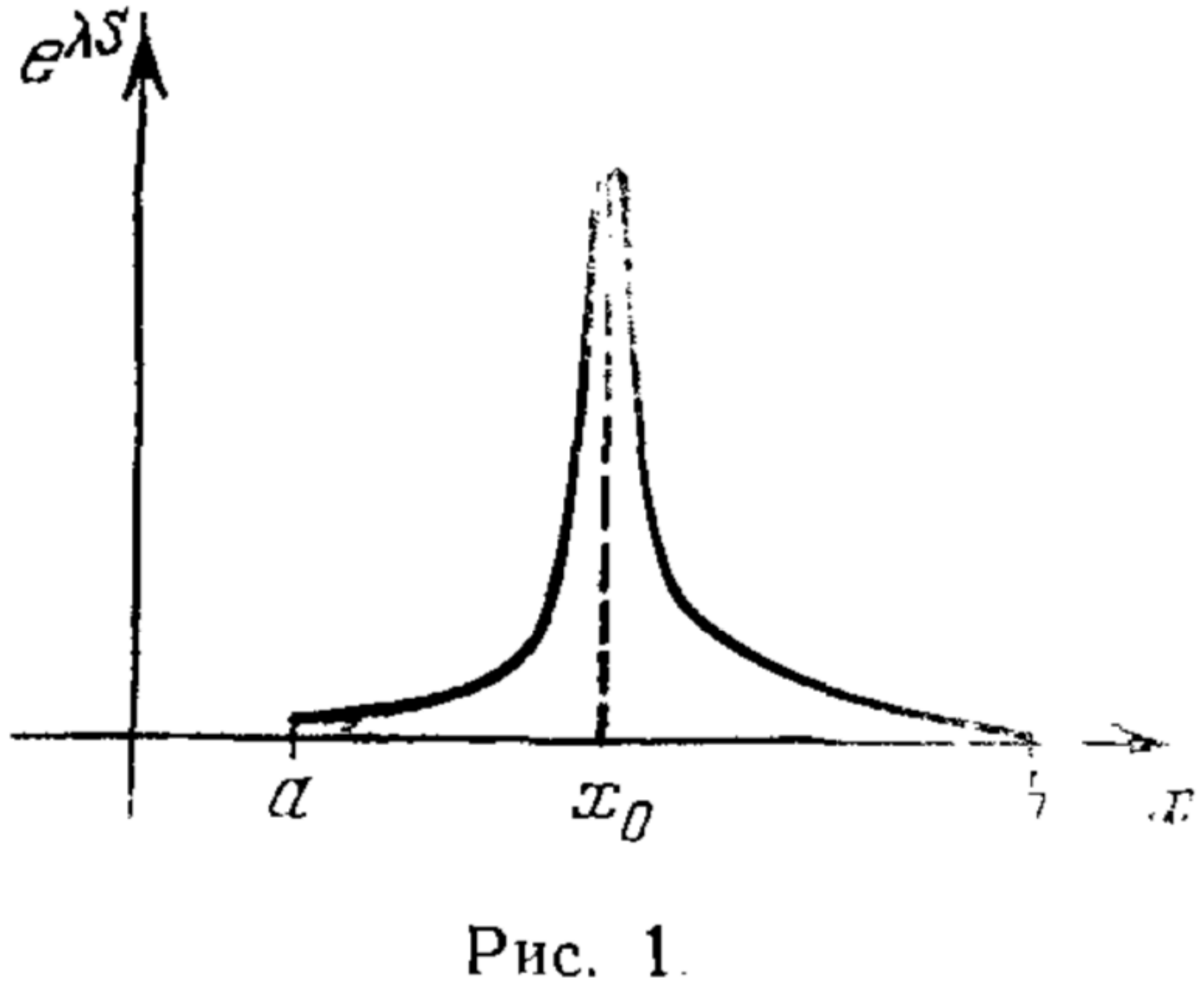

Рис. 1. Метод Лапласа
Источник: Федорюк, 1977

$S(x)$ - функция фазы; $f(x)$ - амплитуда интеграла; λ - большой положительный параметр

Пусть $\max S(x) = S(x_0)$ **=>** $S'(x_0) = 0$. Предположим, что $S''(x_0) \neq 0, f(x_0) \neq 0$

$$\boldsymbol{F(\lambda) = (1 + o(1)) \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} f(x_0) \exp\{\lambda S(x_0)\}, \lambda \to +\infty}$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ РИСКОВ ПОРТФЕЛЕЙ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА

$p_1 = p_2 = p$

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{1} + \boldsymbol{o}(\mathbf{1}))\frac{\boldsymbol{x}^{\alpha_1+\alpha_2}}{\theta^{\alpha_1}(\mathbf{1}-\theta)^{\alpha_2}}\widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x})\widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x})\left(\frac{\left(\frac{\boldsymbol{L}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{L}_{\mathbf{1}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}-\mathbf{1}}}}{\mathbf{1}+\left(\frac{\boldsymbol{L}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{L}_{\mathbf{1}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}-\mathbf{1}}}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{1}{\mathbf{1}+\left(\frac{\boldsymbol{L}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{L}_{\mathbf{1}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}-\mathbf{1}}}}\right)^{\alpha_2}$$

$$\times \exp\left[-x^p\left(\frac{\frac{L_1}{\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}}\left(\frac{\boldsymbol{L}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{L}_{\mathbf{1}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}-\mathbf{1}}}+\frac{L_2}{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{p}}}}{\left(\mathbf{1}+\left(\frac{\boldsymbol{L}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{L}_{\mathbf{1}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}-\mathbf{1}}}\right)^{p}}\right)\right]\sqrt{\frac{2\pi\left(1+\left(\frac{\boldsymbol{L}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{L}_{\mathbf{1}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}-\mathbf{1}}}\right)^{p-2}}{x^p p(p-1)\left(\frac{L_1}{\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}}\left(\frac{\boldsymbol{L}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{L}_{\mathbf{1}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{\boldsymbol{p}-\mathbf{2}}{\boldsymbol{p}-\mathbf{1}}}+\frac{L_2}{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{p}}}\right)}}, \boldsymbol{x}\to\infty,$$

Функции $\widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x})$, $\widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x})$ стремятся к тем же константам, что и $C_i(x), i = 1{,}2$.

$p_1 \neq p_2$

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{1} + \boldsymbol{o}(\mathbf{1}))\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\to\infty,$$

где $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x})$ соответствует плотности актива с меньшим $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}}$.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОСТОЯННЫХ C_1, C_2

Рассмотрим портфель, состоящий из двух активов ξ_1 и ξ_2 с плотностями вида:

$$\boldsymbol{h_i(x) = C_i x^{\alpha_i} e^{-L_i x^{p_i}}},$$

где $p_i > 1, p_1 = p_2 = p,\ L_i > 0, \alpha_i > -1, C_i > 0$ при $x \to \infty, \xi_1$ и ξ_2 – независимы, $i = 1,2$.

Исследуем вероятность наступления крупного риска, вероятность разорения финансового портфеля:

$$\boldsymbol{p(u) := P\{V(\theta;\xi_1,\xi_2) \geq u\} = P\{\theta\xi_1 + (1-\theta)\xi_2 \geq u\}, u \to \infty}$$

В силу независимости рисков $\boldsymbol{\xi_1}$ и $\boldsymbol{\xi_2}$

$$\boldsymbol{p(u) = C_1 C_2 \int_{\theta x + (1-\theta) y \geq u,\ x,y>0} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} e^{-L_1 x^p - L_2 y^p}\, dx dy}$$

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОСТОЯННЫХ C_1, C_2

Разложение вероятности. Лемма. Изучим сначала асимптотическое поведение интеграла

$$\boldsymbol{I(u;c) = \int_{x+y\geq u,\ x,y>0} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} e^{-x^p - cy^p}\, dxdy, c > 0}.$$

Произведем замену переменных:

$$\binom{z}{v} = \binom{x+y}{x/(x+y)}$$

То есть

$$\binom{x}{y} = \binom{zv}{z(1-v)}.$$

Якобиан равен

$$J(z,v) = -z$$

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОСТОЯННЫХ C_1, C_2

Интеграл равен

$$\boldsymbol{I(u;c)} = \int_{\boldsymbol{u}}^{\infty}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}} |J(z,v)| \boldsymbol{z^{\alpha_1+\alpha_2} v^{\alpha_1}(1-v)^{\alpha_2} exp(-z^p(v^p + c(1-v)^p))\, dzdv} =$$

$$\{\text{замена } z = ut\}$$

$$= u^{2+\alpha_1+\alpha_2}\int_1^{\infty} t^{1+\alpha_1+\alpha_2}\int_0^1 v^{\alpha_1}(1-v)^{\alpha_2}\, \boldsymbol{exp\Big(-(tu)^p(v^p + c(1-v)^p)\Big)dtdv}.$$

Далее к внутреннему интегралу $I_1(tu,c)$ было применено развитие метода Лапласа, предложенного в работе Коршунова, Питербарга и Хашорвы (2015). Таким образом, получаем

$$\boldsymbol{I(u;c)} = u^{2+\alpha_1+\alpha_2-p/2}\int_1^{\infty} t^{1+\alpha_1+\alpha_2-p/2} e^{-m_c u^p t^p}\left[c_0 + \sum_{i=1}^{r} c_i (ut)^{-pi/2} + o(u^{-rp/2})\right] \boldsymbol{dt}.$$

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОСТОЯННЫХ C_1, C_2

Воспользуемся равенством

$$\int_1^\infty t^A e^{-m_c u^p t^p}\,dt = \boldsymbol{p}^{-\mathbf{1}} m_c^{-(A+1)/p} u^{-A-1} \int_{m_c u^p}^\infty s^{\frac{A+1}{p}-1} e^{-s} ds$$

$$= \boldsymbol{p}^{-\mathbf{1}} m_c^{-\frac{A+1}{p}} u^{-A-1} \Gamma\left(\frac{A+1}{p}, m_c u^p\right)$$

где $\Gamma(a,x)$ - неполная гамма-функция, для которой имеет место асимптотическое разложение (Градштейн, Рыжик): для любого натурального r

$$\Gamma(a,x) = \int_x^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds$$

$$= x^{\alpha-1} e^{-x}\left(1 + \sum_{m=1}^{r} \frac{(-1)^m \Gamma(1-a+m)}{x^m \Gamma(1-a)} + O(x^{-r-1})\right), x \to \infty.$$

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОСТОЯННЫХ C_1, C_2

Наконец получаем выражение для $I(u;c)$

$$I(u;c) = \frac{1}{pm_c} u^{2+\alpha_1+\alpha_2-3p/2} e^{-m_c u^p}\left[c_0 + \sum_{i=1}^{r} d_i u^{-pi/2} + o(u^{-rp/2})\right], u \to \infty$$

Лемма 1. *Для интеграла* $I(u;c) = \int_{x+y\geq u,\ x,y>0} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} e^{-x^p - cy^p}\, dxdy, c > 0$ *имеет место разложение* $I(u;c) = \frac{1}{pm_c} u^{2+\alpha_1+\alpha_2-3p/2} e^{-m_c u^p}\left[c_0 + \sum_{i=1}^{r} d_i u^{-pi/2} + o(u^{-rp/2})\right]$ *при неограниченно растущем* u, *где константы* m_c, v_0 *и* c_0 *даны выражениями*

$$m_c = (1 + c^{1/(1-p)})^{1-p};\ v_0 = \frac{1}{1 + c^{1/(1-p)}}$$

$$c_0 = \frac{\sqrt{2\pi} v_0^{\alpha_1} (1 - v_0)^{\alpha_2}}{\sqrt{|f_c''|}};\ f_c'' = -\frac{p(p-1)c^{1/(p-1)}}{\left(1 + c^{\frac{1}{1-p}}\right)^{p-3}}$$

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОСТОЯННЫХ C_1, C_2

Разложение вероятности. Продолжение.

Применим полученную лемму к вероятности

$$\boldsymbol{p(u) = C_1 C_2 \int_{\theta x+(1-\theta)y\geq u,\ x,y>0} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} e^{-L_1 x^p - L_2 y^p}\, dxdy}$$

Для этого произведем замену переменных: $x_1 = L_1^{1/p} x,\ y_1 = \frac{1-\theta}{\theta} L_2^{1/p} y,$

Тогда

$$\boldsymbol{p(u) = C_1 C_2} L_1^{\alpha_1/p} \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{\alpha_2} L_2^{\alpha_2/p}$$

$$\times \int_{\boldsymbol{x_1+y_1\geq \theta^{-1} L_1^{\frac{1}{p}} u,\ x,y>0}} x_1{}^{\alpha_1} y_1{}^{\alpha_2} \boldsymbol{e}^{-x_1{}^p - c y_1{}^p}\, \boldsymbol{d}x_1 \boldsymbol{d}y_1,$$

где $c = \frac{L_2 \boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}}{L_1(1-\boldsymbol{\theta})^p}$. Теперь можно применить лемму с $u_1 = \boldsymbol{\theta}^{-1} L_1^{\frac{1}{p}} u$.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОСТОЯННЫХ C_1, C_2

Запишем константы в соответствии с леммой:

$$v_0 = \frac{(L_1\theta^{-p})^{1/(1-p)}}{(L_1\theta^{-p})^{1/(1-p)} + (L_2(1-\theta)^{-p})^{1/(1-p)}}, \quad m_c = \left(1 + \left(\frac{L_2(1-\theta)^{-p}}{L_1\theta^{-p}}\right)^{1/(1-p)}\right)^{1-p}$$

$$m_c\, u_1^p = \left((L_1\theta^{-p})^{1/(1-p)} + (L_2(1-\theta)^{-p})^{1/(1-p)}\right)^{1-p} u^p$$

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 1. *Для любого натурального r вероятность разорения портфеля* $V(\theta; \xi_1, \xi_2)$ *может быть* представлена в виде

$$p(u) = C_1 C_2 K u^{2+\alpha_1+\alpha_2-3p/2} e^{-Lu^p}\left[C_0 + \sum_{i=1}^{r} D_i u^{-pi/2} + o(u^{-rp/2})\right], u \to \infty,$$

$$L = \left((L_1\theta^{-p})^{1/(1-p)} + (L_2(1-\theta)^{-p})^{1/(1-p)}\right)^{1-p},$$

K, C_0, D_i *— константы, которые вычисляются через* $\theta, L_i, \alpha_i, i = 1,2.$

ОЦЕНКА УСЛОВНОГО МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА ПО БОЛЬШИМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Рассмотрим распределение Вейбулла:

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \begin{cases} e^{-Lx^p}, x \geq u \\ T_0(x), 0 \leq x < u \end{cases}$$

где $T_0(x)$ - дифференцируема, равна единице в нуле и не возрастает, причем в силу требования существования плотности $T_0(u) = 1 - F(u); p > 1, L > 0$.

Требуется построить статистическую оценку вектора параметров $\theta \coloneqq (p,\ L)$ по выборке $(X_1, \dots, X_N)$ из этого распределения. Чтобы оценить параметры воспользуемся приемом, предложенным Хиллом (Hill, 1975).

ОЦЕНКА УСЛОВНОГО МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СТАРШИХ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

Условная плотность:

$$f_u(x) = \frac{d}{dx} P(X \le x | X \ge u) = Lpx^{p-1} e^{-L(x^p - u^p)}, x \ge u$$

Функция условного правдоподобия при условии $X \ge u$ равна:

$$\mathcal{L}(X; u, L, p) = L^v p^v \prod_{i=1}^{N} f_u(X_i) I\{X_i \ge u\} = L^v p^v \prod_{i=1}^{N} X_i^{p-1} I\{X_i \ge u\}$$

$$\times \exp\left[-L \sum_{i:X_i \ge u} \left(X_i^p - u^p\right)\right],$$

где v – число членов выборки, больше или равных u, I - индикаторная функция. Теперь возьмем порядковую статистику выборки: $X_{1,N} \ge X_{2,N} \ge \cdots \ge X_{N,N}$

и положим $u = X_{n,N}$.

ОЦЕНКА УСЛОВНОГО МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СТАРШИХ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

Перепишем функцию условного правдоподобия с учетом $u = X_{n,N}$:

$$\mathcal{L}(X; X_{n,N}, L, p) = L^n p^n \prod_{i=1}^{n} X_{i,N}^{p-1} \exp\left[-L \sum_{i=1}^{n} (X_{i,N}^p - X_{n,N}^p)\right]$$

Выпишем логарифм функции правдоподобия и найдем ее максимум на области p > 1, L > 0.

$$ln\mathcal{L}\big(X; X_{n,N}, L, p\big) = nlnL + nlnp + (p-1)\sum_{i=1}^{n} lnX_{i,N} - L\sum_{i=1}^{n}(X_{i,N}^p - X_{n,N}^p)$$

Оценка вектора параметров $\theta \coloneqq (p, L)$ является решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{n}{L} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_{i,N}^p - X_{n,N}^p), \\ \dfrac{n}{p} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} lnX_{i,N} = L\sum_{i=1}^{n} X_{i,N}^p lnX_{i,N} - nLX_{n,N}^p lnX_{n,N}. \end{cases}$$

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА ПО СТАРШИМ ПОРЯДКОВЫМ СТАТИСТИКАМ, ОСНОВАННАЯ НА НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ ХВОСТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Эмпирическая оценка хвоста распределения имеет вид:

$$(\bar{F}(x))_N = \frac{n}{N}\left(\frac{x}{X_{n+1,N}}\right)^{-1/\xi_{n,N}^{(H)}}, \text{где } \xi_{n,N}^{(H)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} lnX_{j,N} - lnX_{n,N}.$$

Для того чтобы оценить $\theta \coloneqq (p, L)$ рассмотрим квадрат среднеквадратичного расстояния логарифмов теоретического и эмпирического распределения хвостов в качестве меры близости:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(ln(\bar{F}(X_{j,N}))_N - ln\bar{F}(X_{j,N};\theta)\right)^2$$

Оценка вектора параметров $\theta \coloneqq (p, L)$ является решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}(ln\frac{n}{N} - \frac{lnX_{j,N} - lnX_{n+1,N}}{\xi_{n,N}^{(H)}} + LX_{j,N}^{p})X_{j,N}^{p} = 0, \\ \sum_{j=1}^{n}\left(ln\frac{n}{N} - \frac{lnX_{j,N} - lnX_{n+1,N}}{\xi_{n,N}^{(H)}} + LX_{j,N}^{p}\right)LX_{j,N}^{p}\, lnX_{j,N} = 0. \end{cases}$$

ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ ОЦЕНОК ПУТЕМ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

$p = 2, L = 5$

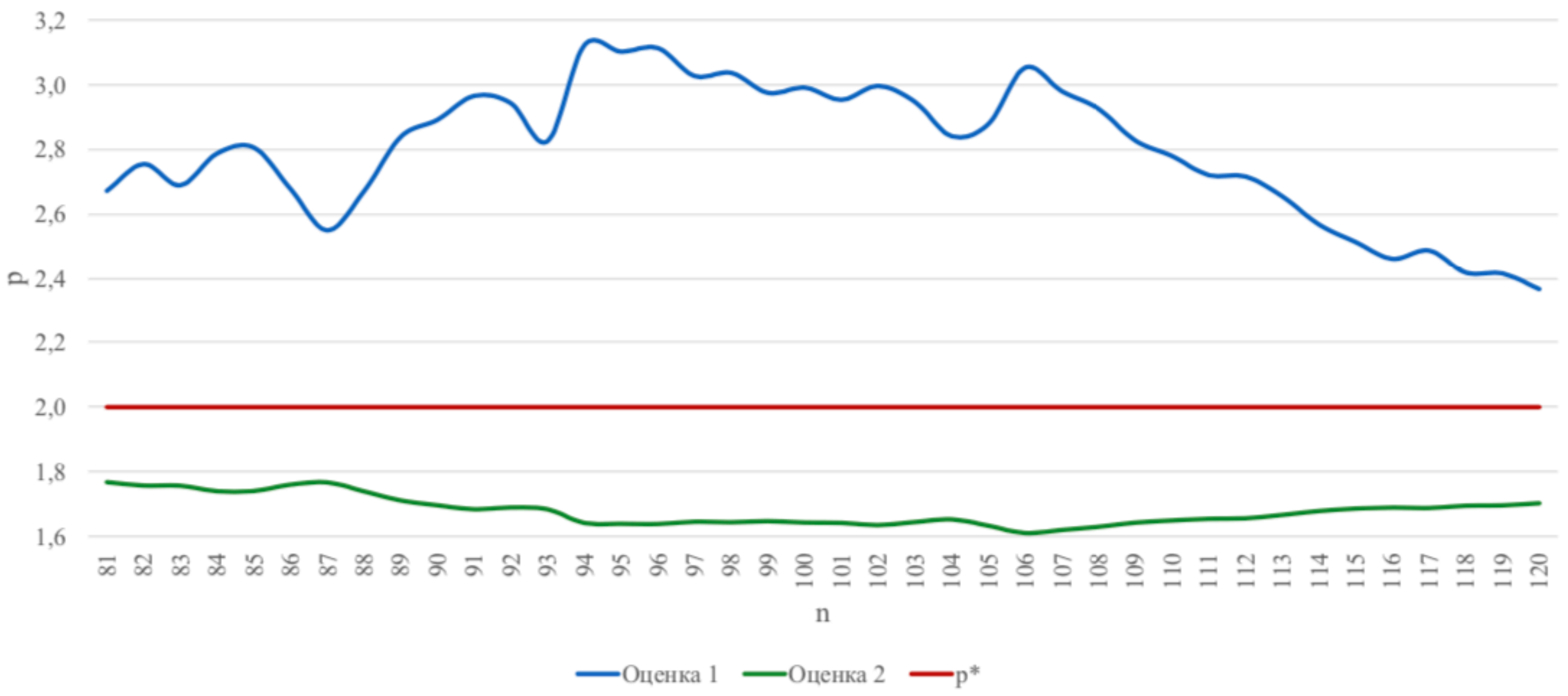

Рис. 2. Оценки для p

Источник: расчеты автора

Рис. 3. Оценки для L

Источник: расчеты автора

$p = 3, L = 4$

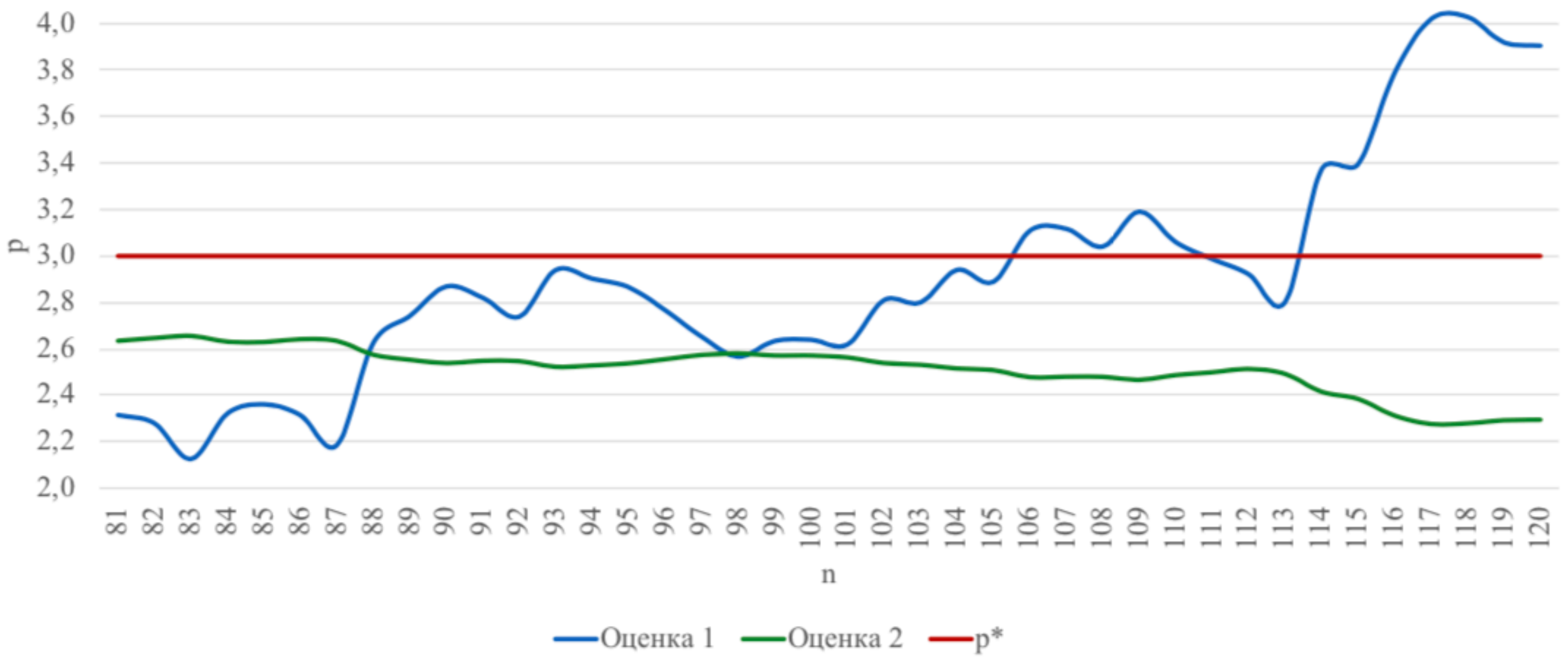

Рис. 4. Оценки для p

Источник: расчеты автора

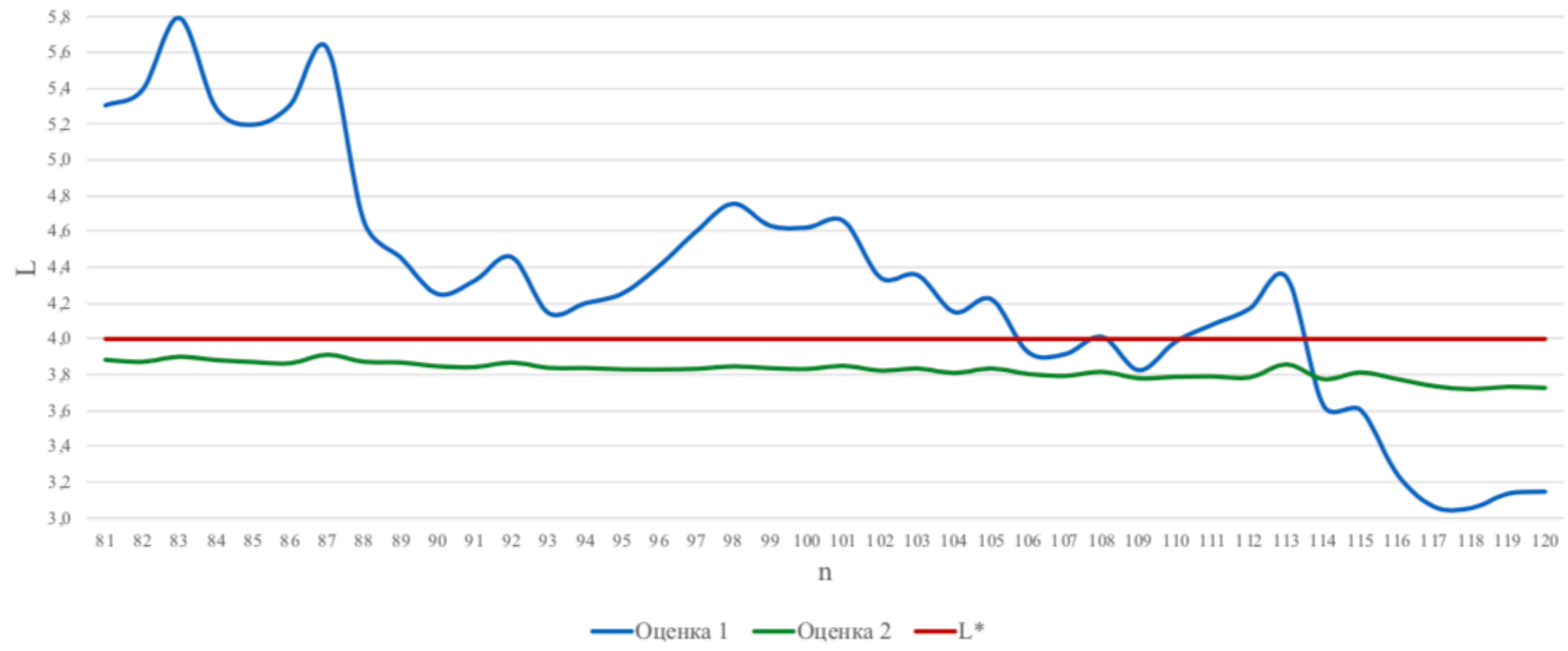

Рис. 5. Оценки для L

Источник: расчеты автора

ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ ОЦЕНОК ПУТЕМ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

$p = 4, L = 3$

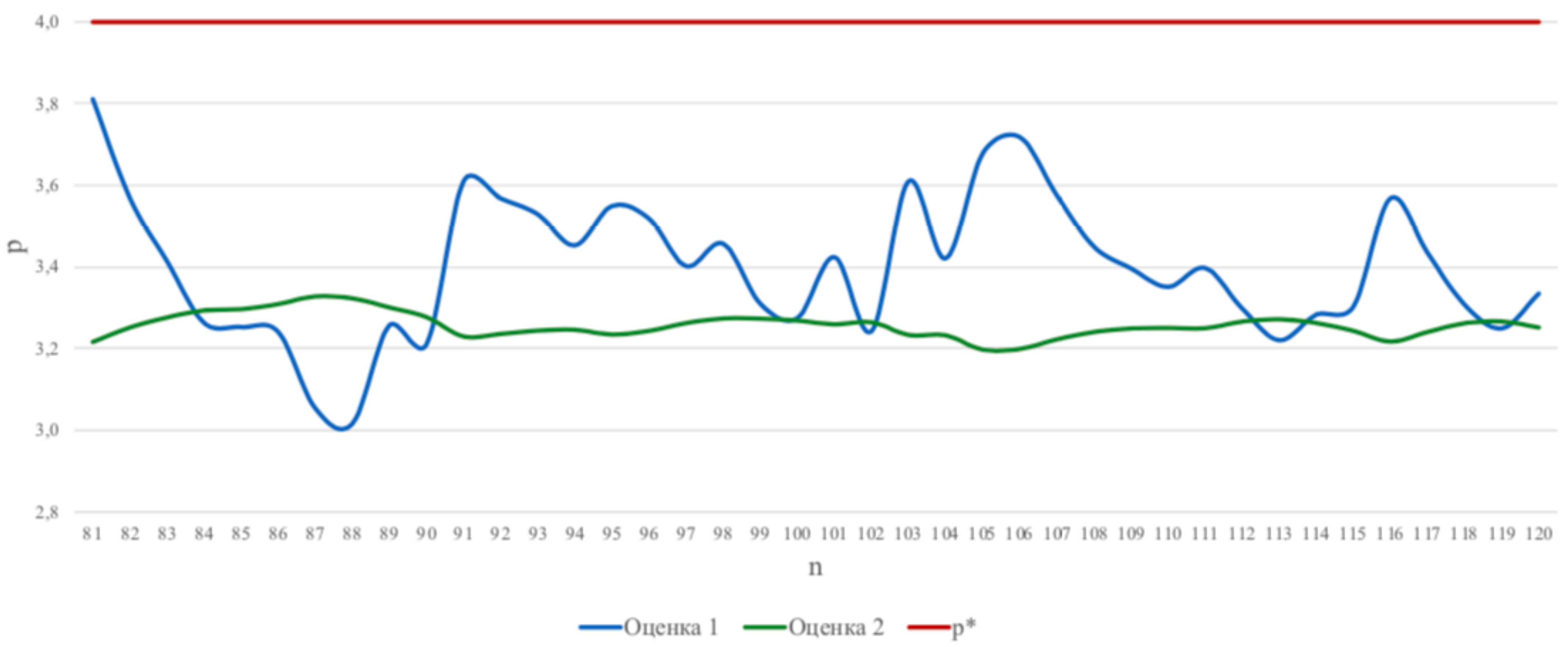

Рис. 6. Оценки для p

Источник: расчеты автора

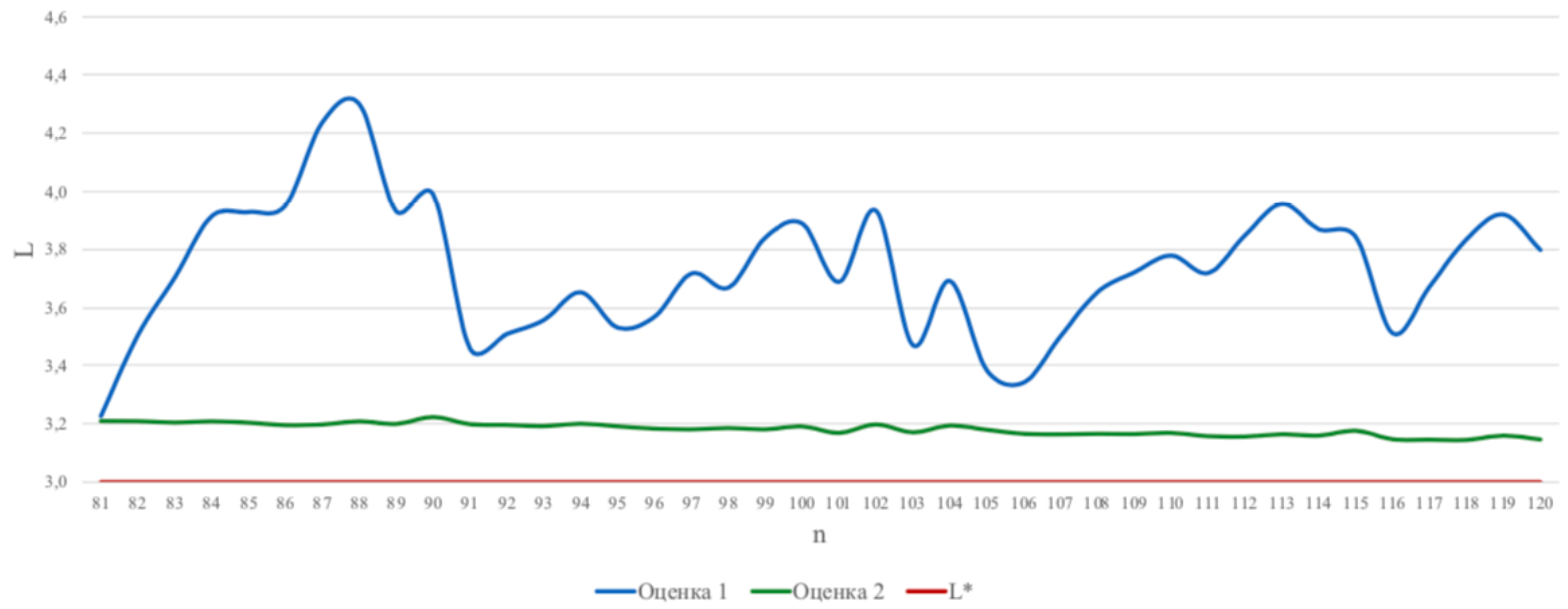

Рис. 7. Оценки для L

Источник: расчеты автора

$p = 5, L = 2$

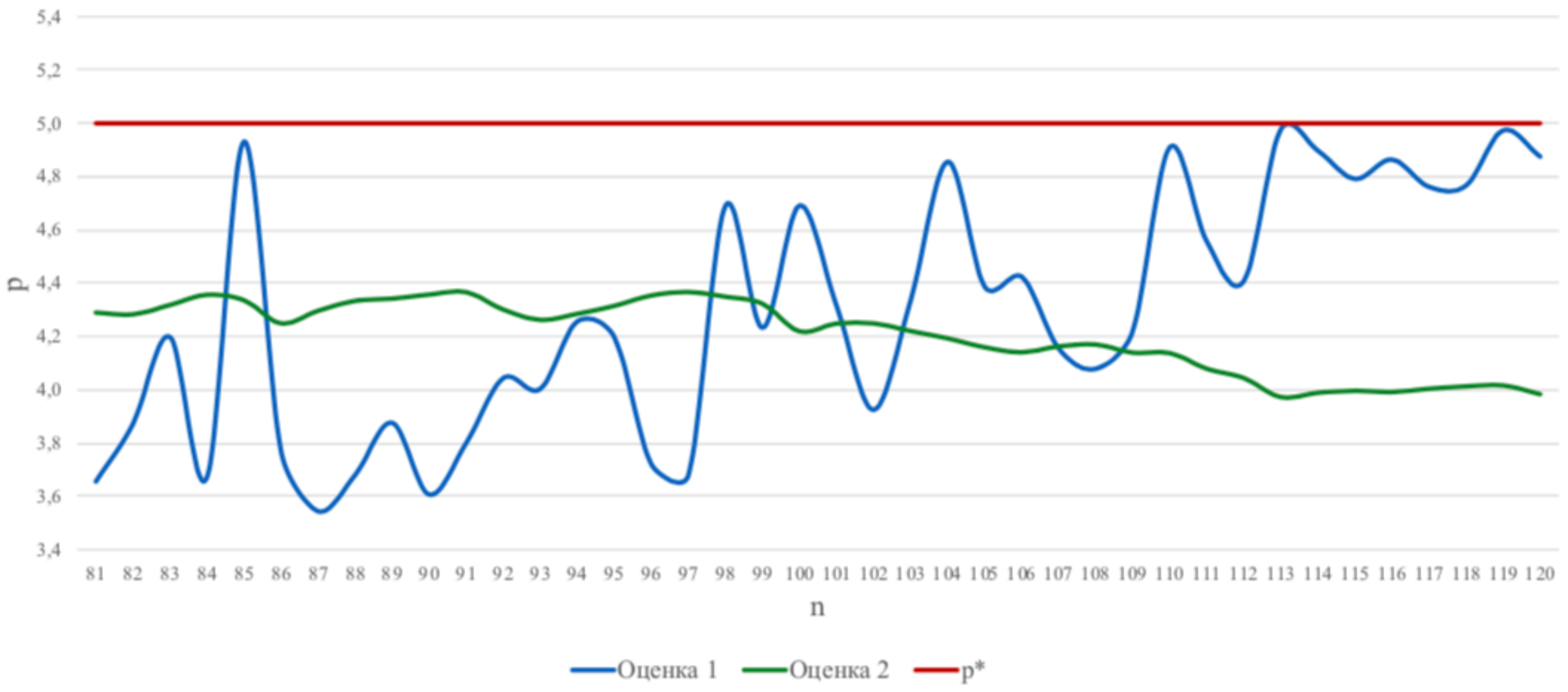

Рис. 8. Оценки для p

Источник: расчеты автора

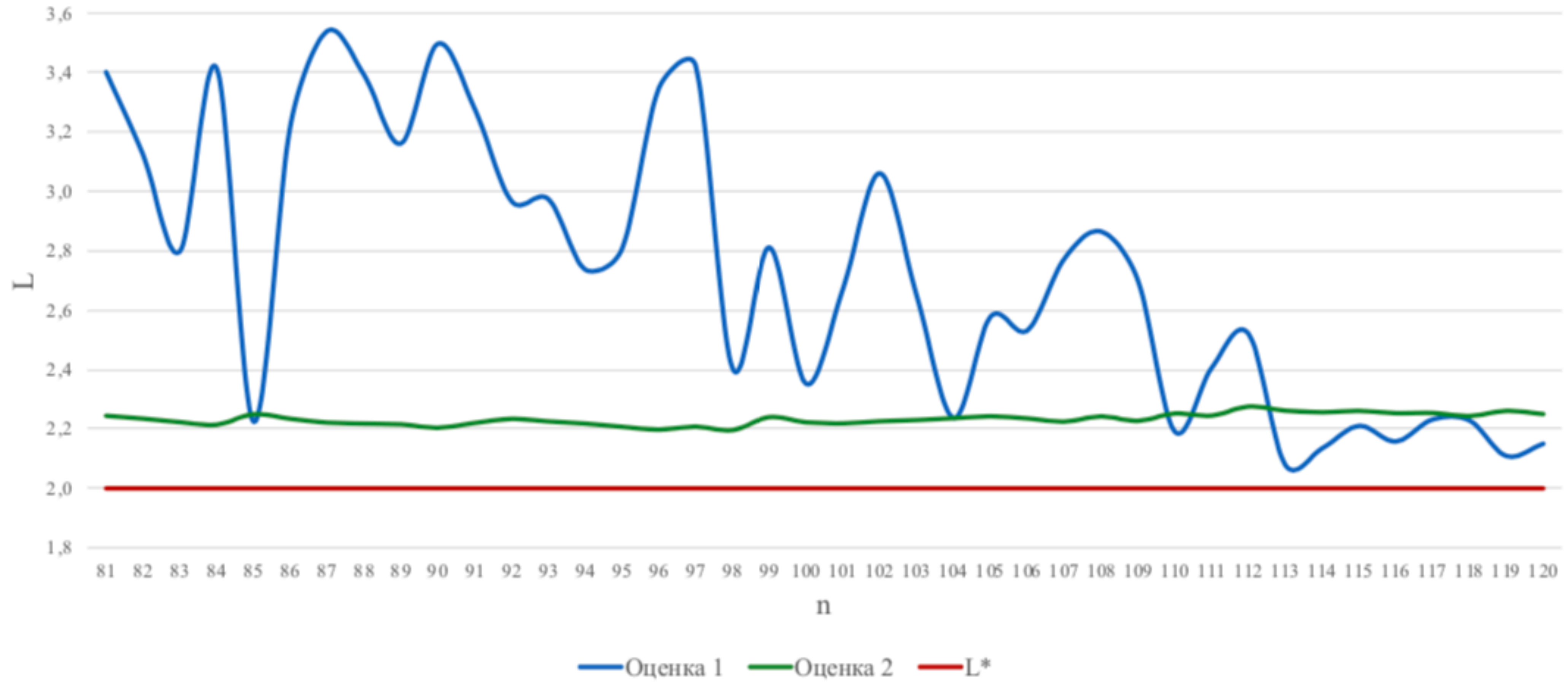

Рис. 9. Оценки для L

Источник: расчеты автора

ВЫВОДЫ

1. Распределение хвоста финансового портфеля, активы которого имеют распределение вейбулловского типа, также имеет распределение вейбулловского типа, причем, в случае неравенства экстремальных индексов плотностей распределения активов, оно соответствует плотности актива с меньшим значением экстремального индекса.
2. Предложено два подхода к оценке параметров хвоста распределения финансового портфеля вейбулловского типа, в том числе экстремального индекса, по наблюдениям старших порядковых статистик. Первая основана на условном методе максимального правдоподобия, вторая - на непараметрической оценке хвоста распределения, основанной на общей теории статистики экстремумов.
3. Статистическое моделирование показало, что оценки параметров распределения достаточно близки к точному значению соответствующего параметра даже при умеренном объеме выборки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Градштейн, Рыжик / Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений
2. Федорюк М. В. Метод перевала. 1977, с. 28
3. Коршунов Д. А., Питербарг В. И., Хашорва Е. Об асимптотическом методе Лапласа и его применении к случайному хаосу // Математические заметки. 2015. Т. 97, No 6, с. 868–883
4. Asmussen, Hashorva, Laub, Taimre.Tail asymptotics of light-tailed Weibull-like sums // Probability and mathematical statistics. 2017, Vol. 37, pp. 235-256
5. Farkas Julia.(2017)Asymptotic Analysis of Aggregated Multi-Valued Risks. PHD Thesis. Lausanne university.
6. Hill. A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution // The Annals of Statistics. 1975, Vol. 3, No. 5, pp. 1163-1174

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Международная лаборатория стохастического анализа

ОЦЕНКА ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ИНДЕКСА ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ ВЕЙБУЛЛОВСКОГО ТИПА

Подготовила:

Алиева Пируза Ниязи кызы

Руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Питербарг Владимир Ильич

Москва, 2020