МИЭМ НИУ ВШЭ

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ АЛГЕБР ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ (КОНЕЧНЫЙ ГОРИЗОНТ)

д. ф.-м. н. Хаметов В.М.,
Шелемех Е.А., Ясонов Е.В.

НИУ ВШЭ

План выступления

1. Постановка задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом в дискретном времени
2. Обзор результатов, посвященных задаче об оптимальной остановке
3. Формулировка основных результатов
4. Примеры постоения решения задачи об оптимальной остановке по наблюдениям за случайной последовательностью, элементы которой принимают конечное число значений
5. Заключение

Постановка задачи
Обозначения

Пусть:
i) $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathsf{P})$ - стохастический базис;
ii) $N \in \mathbb{N}^+$ - горизонт, $\mathbb{N}_0 := \{0,\ ...,\ N\}$;
iii) $\mathcal{T}_n^N$ - множество моментов остановки τ относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, принимающих значения из множества $\mathbb{N}_n = \{n, ..., N\}$;
iv) $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ - согласованная последовательность ограниченных случайных величин (f_n имеет смысл функции полезности);
v) $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_n)$ - множество всех P-п.н. ограниченных $\mathcal{F}_n$-измеримых случайных величин, где $n \in \mathbb{N}_0$.

Постановка задачи

$$\mathsf{E}[f_{\tau\wedge N}|\mathcal{F}_0] \to \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_0^N} \qquad (1)$$

Задачу (1) называют задачей об оптимальной остановке ([Ширяев «Статистический последовательный анализ»]).

Основные определения

Обозначим $v_n^N \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \mathsf{E}[f_{\tau \wedge N} | \mathcal{F}_n]$, где $n \in \mathbb{N}_0$.

Определение 1 ([Ширяев «Статистический последовательный анализ»]). Для любого $n \in \mathbb{N}_1$ случайную величину v_n^N назовем урезанной ценой оптимальной остановки в момент времени n.

Определение 2. Момент остановки $\tau^* \in \mathcal{T}_n^N$ назовём оптимальным, если для любого $n \in \mathbb{N}_0$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \mathsf{E}[f_{\tau \wedge N} | \mathcal{F}_n] = \mathsf{E}[f_{\tau^* \wedge N} | \mathcal{F}_n] \quad P - \text{п.н.}$$

Обзор результатов по теории оптимальных правил остановки

В работах Де Гроот «Оптимальные статистические решения», Роббинс, Сигмунд, Чао «Теория оптимальных правил остановки», Фельмер, Шид «Введение в стохастические финансы. Дискретное время», Ширяев «Основы стохастической финансовой математики» и др. рассматривается последовательность $\{v_n^N\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ и предполагается, что последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ – последовательность ограниченных случайных величин. В них без должного обоснования предполагается, что последовательность $\{v_n^N\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ удовлетворяет рекурентному соотношению

$$v_n^N = \max\left\{f_n; \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n]\right\}, \quad v_n^N|_{n=N} = f_N, \tag{2}$$

которую называют огибающей Снелла.

Обзор результатов

В этих работах доказывается, что последовательность $\{v_n^N\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ является супермартингалом, а также утверждение о том, что момент остановки, определяемый соотношением

$$\tau^* = \min\left\{n \in \mathbb{N}_0 : f_n = v_n^N\right\} \tag{3}$$

является оптимальным, то есть для любого $n \in \mathbb{N}_0$ P-п.н.

$$v_n^N = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N} \mathsf{E}[f_{\tau\wedge N}|\mathcal{F}_n] = \mathsf{E}[f_{\tau^*\wedge N}|\mathcal{F}_n]. \tag{4}$$

В работе BOYARCHENKO, LEVANDORSKII «Non-Gaussian Merton-Black-Scoles Theory» без должного обоснования предполагается, что область остановки отделяется от области продолжения наблюдений одной точкой. В этом предположении для решения уравнения (2) используется метод Виннера-Хопфа. Забегая вперёд отметим, что приводимые в докладе примеры показывают, что это предположение в случае конечного горизонта вообще говоря не имеет места.

Обзор результатов

В работе KUKUSH, SILVESTROV «Optimal pricing of American type options with descrete time» для конечного горизонта установлены условия, обеспечивабщие единственность оптимального момента остановки.
В работе FERGUSON «Optimal Stopping and Applications» содержутся 17 примеров, которые допускают аналитическое решение задачи об оптимальной остановке с дискретным временем и конечным горизонтом.

Сформулируем основные утверждения данной работы.

Рекуррентное соотношение для урезанной цены оптимальной остановки

Теорема 1. Пусть $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} ||f_n||_{\mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{F}_n)} \le C$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}_0$ имеет место оценка $|v_n^N| \le C$ P-п.н.

Замечание. Теорема 1 устанавливает ограниченность урезанной цены в задаче об оптимальной остановке.

Теорема 2. Согласованная последовательность $(v_n^N, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ является последовательностью урезанных цен тогда и только тогда, когда она удовлетворяет рекуррентному соотношению P-п.н.

$$v_n^N = \max\left\{f_n; \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n]\right\}, \quad v_n^N|_{n=N} = f_N. \tag{5}$$

Замечания к теореме 2

Замечание 1. Доказательтво достаточности условий в формулировке теоремы 2 было известно ранее ([Фельмер, Шид «Введение в стохастические финансы. Дискретное время»]). Доказательство необходимости приводится впервые ([Хаметов, Шелемех, Ясонов «Алгоритм решения задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом»]).

Замечание 2. Предположение об ограниченности элементов последовательности $\{f_n\}$ в утверждении теоремы 2 носят технический характер (чтобы не формулировать громоздкие условия равномерной интегрируемости). Поэтому в качестве последовательности $\{f_n\}$ можно использовать равномерно-интегрируемые или ограниченные семимартингалы.

Теорема 3. Пусть $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} ||f_n||_{\mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{F}_n)} \leq C$. Тогда последовательность $(v_n^N, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ является супермартингалом.

Критерий оптимальности момента остановки

Очевидно существование оптимального момента остановки. Возникает вопрос: «Как его вычислить?»

Теорема 4. Момент остановки τ^* оптимален тогда и только тогда, когда
$\tau^* = \min\left\{n \in \mathbb{N}_0 : f_n = v_n^N\right\}$. Р-п.н.

Определение решения задачи об оптимальной остановке

Определение 3. Пару $\left(\tau^*, v_0^N\right) \in (\mathcal{T}_0^N, \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_0))$ такую, что $v_0^N = \mathsf{E}[f_{\tau^* \wedge N} | \mathcal{F}_0]$ P-п.н., будем называть решением задачи (1), при этом: i) момент остановки $\tau^* \in \mathcal{T}_0^N$ назовем оптимальным; ii) $\mathcal{F}_0$-измеримую случайную величину v_0^N - ценой оптимальной остановки.

Теорема 5. Пара $\left(\tau^*, v_0^N\right) \in (\mathcal{T}_0^N, \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_0))$ является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда выполняются условия:
1) последовательность $(v_n^N, \mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq \tau^* \wedge N}$ - мартингал относительно меры P;
2) $v_n^N|_{n=\tau^* \wedge N} = f_{\tau^* \wedge N}$

Замечание. Теорема 5 даёт критерий существования решения задачи (1).

Алгоритм решения задачи (1)

Теоремы 1-5 позволяют описать алгоритм постоения решения задачи (1), которая является сложной математической задачей в силу следующего обстоятельства. Необходимо построить две области: область остановки, область продолжения момента наблюдения в каждый момент времени $n \in \mathbb{N}_0$.

Описание алгоритма.
Пусть на шаге N $v_N^N = f_N$. Затем для каждого $n = N-1, ..., 0$ последовательно вычисляются:
1) математическое ожидание $\mathsf{E}[v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n]$;
2) оптимальный момент остановки
$\tau^* = \min\left\{n \leq k \leq N : f_k \geq \mathsf{E}\left[v_{k+1}^N | \mathcal{F}_k\right]\right\}$;
3) цена оптимальной остановки
$v_n^N = 1_{\{\tau^*=n\}} f_n + 1_{\{\tau^*>n\}} \mathsf{E}[v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n]$.
Затем операции, описанные в пунктах 1) - 3), повторяются для шага $n-1$ и так далее до $n = 0$.

Алгоритм решения задачи (1)

Из утверждения теоремы 5 следует утверждение.

Теорема 6. Пусть пара $\left(\tau^*, v_0^N\right)$ построена в соответствии с алгоритмом. Тогда $\left(\tau^*, v_0^N\right)$ - решение задачи (1).

Замечание. Основные трудности в использовании алгоритма состоят в i) вычислении условного математического ожидания для урезанной цены оптимальной остановки, ii) в построении областей остановки и продолжения наблюдений. Поэтому для преодоления этих трудностей была применена система компьютерной алгебр Wolfram Mathematica 10, когда наблюдаемая последовательность является дискретной согласованной с фильтрацией случайной последовательностью.

Примеры задач, которые будут решены с помощью системы компьютерных алгебр

Пусть $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ - марковская случайная последовательность, на каждом шаге $n \in \mathbb{N}_0$ принимающая конечное число значений из множества $E \subseteq \mathbb{R}^1$. Пусть $p_n(x, y)$ переходные вероятности за один шаг, то есть $p_n(x, y) \triangleq \mathsf{P}(S_n = y | S_{n-1} = x)$, где $x, y \in E$ – любые.

Пусть функция $f_n : E \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$. Обозначим $f_n = f_n(x)|_{x=S_n}$. Тогда в силу марковского свойства последовательности $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, определения v_n^N и теоремы Бореля существует функция $v_n^N : E \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ такая, что $v_n^N = v_n^N(x)|_{x=S_n}$.

Примеры задач, которые будут решены с помощью системы компьютерных алгебр
Описание множества остановки

Определение 4. Для любого $n \in \mathbb{N}_0$ множество $\mathcal{D}_n \triangleq \left\{x \in E : f_n(x) \geq v_n^N(x)\right\}$ назовём множеством остановки в момент времени n.

Замечание. Если для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ известно множество $\mathcal{D}_n^N$, то определён оптимальный момент остановки, который может оказаться не единственным.

Примеры задач, которые будут решены с помощью системы компьютерных алгебр. Описание процедуры построения решения для рассматриваемой задачи (слайд 16)

Поскольку последовательность $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ - марковская, то $\mathsf{E}[v^N_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathsf{E}v^N_{n+1}\left(S^{n,x}_{n+1}\right) = \sum\limits_{y\in E} v^N_{n+1}(y)p_{n+1}(x,y)$, где $S^{n,x}_{n+1}$ - значение случайной последовательности S_{n+1}, стартовавшей в момент времени n из значения x, $x \in E$.

В силу теорем 2 и 5 имеем представление

$$v^N_n(x) = \begin{cases} f_n, & x \in \mathcal{D}^N_n, \\ \sum\limits_{y\in E} v^N_{n+1}(y)p_{n+1}(x,y), & x \notin \mathcal{D}_n, \end{cases} \tag{6}$$

где $\mathcal{D}_n = \left\{x \in E : \sum\limits_{y\in E} v^N_{n+1}(y)p_{n+1}(x,y) \le f_n(x)\right\}.$

Результаты применения системы компьютерных алгебр

Пусть имеется одномерная однородная марковская последовательность $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

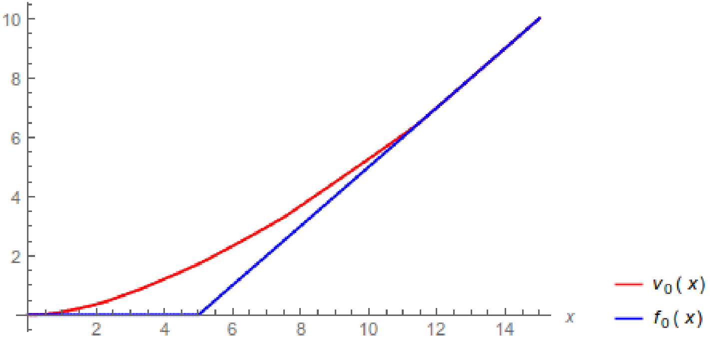
$$S_{n+1} = S_n(1 + \rho_{n+1}),\ S_n|_{n=0} = S_0,$$

где $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ - последовательность случайных величин, принимающих значения в E.

В рассмотренных ниже примерах приведены решения задач об оптимальной остановке для функций $f(x)$ различного вида, где $f(x)$ – измеримая ограниченная функция. Приводимые ниже примеры в литературе не описаны.

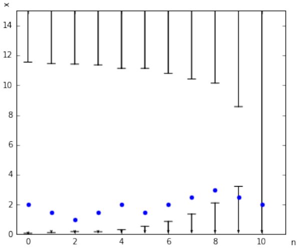
Пример 1. Расчет американского опциона call на полном рынке.

Пусть $E = \{a; b\}, \quad -1 < a < 0 < b < \infty, \quad f_n(x) = \beta^n (x - K)^+$
$-a = b = 0.5, \quad p = q = 0.5, \quad N = 10, \quad \beta = 0.9, \quad K = 5$



$D_0 = \{0 < x \leq 0.0867076\} \cup \{11.4409 \leq x\}$ – область остановки последовательности $\{S_n\}$ в момент времени 0.

Пример 1. Расчет американского опциона call на полном рынке. Зависимость областей остановки от номера наблюдения.



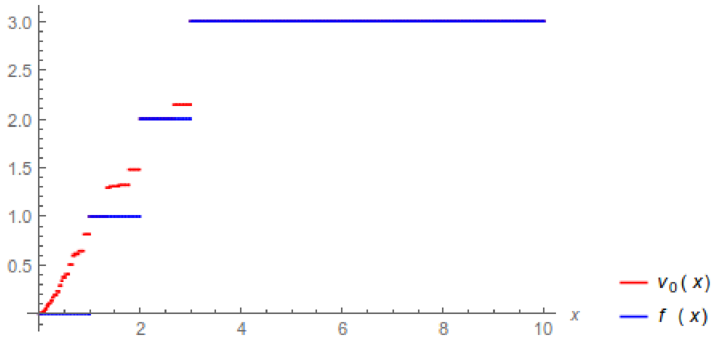
Линии – области остановки на каждом шаге. Точки – реализация S_n. **Выводы**. 1) Области остановки при каждом $n \in \mathbb{N}_0$ являются несвязными областями (поэтому это не луч). 2) Для данной реализации последовательности $\{S_n\}_{0 \leq n \leq 10}$ оптимальный момент остановки $\tau^* = 9$. 3) Области остановки могут быть как замкнутыми, так и открытыми.

Пример 1. Явный вид цены в данной задаче об оптимальной остановке $v_0^{10}(x)$

$$
\text{Value-function[0]} = \begin{cases}
-5.+x & x \ge 11.4409 \\
1.47789\times 10^{-6}\,(-2560.+19683.\,x) & 0.220104 \le x \le 0.260123 \\
3.32526\times 10^{-7}\,(-5120.+59049.\,x) & 0.0867076 < x < 0.220104 \\
3.69473\times 10^{-8}\,(-517120.+2.38164\times 10^{6}\,x) & 0.260123 < x < 0.391593 \\
3.2842\times 10^{-8}\,(-670720.+2.90652\times 10^{6}\,x) & 0.391593 \le x < 0.603568 \\
1.82456\times 10^{-8}\,(-2.47552\times 10^{6}+7.21929\times 10^{6}\,x) & 0.660312 \le x \le 0.780369 \\
4.50508\times 10^{-9}\,(-5.80122\times 10^{7}+6.90725\times 10^{7}\,x) & 1.98094 \le x < 2.17805 \\
2.2807\times 10^{-9}\,(-4.59315\times 10^{7}+9.12351\times 10^{7}\,x) & 0.780369 < x < 0.938046 \\
4.56139\times 10^{-10}\,(-6.70874\times 10^{7}+2.4041\times 10^{8}\,x) & 0.603568 \le x < 0.660312 \\
1.40784\times 10^{-10}\,(-1.25629\times 10^{9}+1.89293\times 10^{9}\,x) & 1.45203 \le x < 1.8107 \\
1.12627\times 10^{-10}\,(-1.95097\times 10^{9}+2.57636\times 10^{9}\,x) & 1.8107 \le x < 1.98094 \\
5.06822\times 10^{-11}\,(-2.37564\times 10^{9}+4.43469\times 10^{9}\,x) & 0.938046 \le x < 1.17478 \\
5.06822\times 10^{-11}\,(-2.72152\times 10^{9}+4.72911\times 10^{9}\,x) & 1.17478 \le x < 1.45203 \\
5.00565\times 10^{-11}\,(-6.94948\times 10^{9}+7.01007\times 10^{9}\,x) & 2.17805 \le x \le 2.34111 \\
3.12853\times 10^{-11}\,(-1.49285\times 10^{10}+1.28433\times 10^{10}\,x) & 2.34111 < x < 2.81414 \\
1.73807\times 10^{-12}\,(-4.13804\times 10^{11}+2.76695\times 10^{11}\,x) & 3.33378 \le x < 3.52434 \\
1.25141\times 10^{-12}\,(-4.23227\times 10^{11}+3.38854\times 10^{11}\,x) & 2.81414 \le x < 3.33378 \\
5.40733\times 10^{-13}\,(-2.41701\times 10^{12}+1.1177\times 10^{12}\,x) & 5.02731 \le x < 5.43211 \\
3.0899\times 10^{-13}\,(-4.57888\times 10^{12}+2.01779\times 10^{12}\,x) & 5.94281 \le x < 6.53416 \\
3.0899\times 10^{-13}\,(-5.13888\times 10^{12}+2.1035\times 10^{12}\,x) & 6.53416 \le x \le 7.02332 \\
6.95229\times 10^{-14}\,(-1.08494\times 10^{13}+7.06046\times 10^{12}\,x) & 3.52434 \le x < 4.3561 \\
6.95229\times 10^{-14}\,(-1.25294\times 10^{13}+7.44613\times 10^{12}\,x) & 4.3561 \le x < 5.02731 \\
5.40733\times 10^{-14}\,(-2.52799\times 10^{13}+1.13813\times 10^{13}\,x) & 5.43211 \le x < 5.94281 \\
4.29153\times 10^{-14}\,(-6.67878\times 10^{13}+1.89524\times 10^{13}\,x) & 10.0014 \le x < 10.573 \\
1.54495\times 10^{-14}\,(-1.10051\times 10^{14}+4.31055\times 10^{13}\,x) & 7.02332 < x < 7.56445 \\
8.58307\times 10^{-16}\,(-3.06381\times 10^{15}+9.19056\times 10^{14}\,x) & 7.56445 \le x < 8.44241 \\
8.58307\times 10^{-16}\,(-3.1185\times 10^{15}+9.25534\times 10^{14}\,x) & 8.44241 \le x < 10.0014 \\
8.58307\times 10^{-16}\,(-3.36322\times 10^{15}+9.49873\times 10^{14}\,x) & 10.573 \le x < 11.4409 \\
0. & \text{True}
\end{cases}
$$

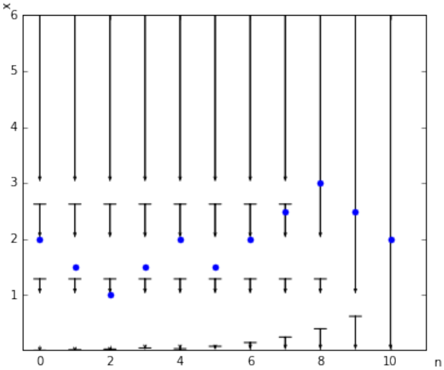
Пример 2. Разрывная функция

Пусть $E = \{a; b\}$, $\quad -1 < a < 0 < b < \infty$, $\quad f_n(x) = f(x)$
$-a = b = 0.5$, $\quad p = q = 0.5$, $\quad N = 10$.



$D_0 = \{0 < x \leq 0.0173415\} \cup \{1 < x \leq 1.33333\} \cup \{2 < x \leq 2.66667\} \cup \{3 < x\}$ – область остановки последовательности $\{S_n\}$ в момент времени 0.

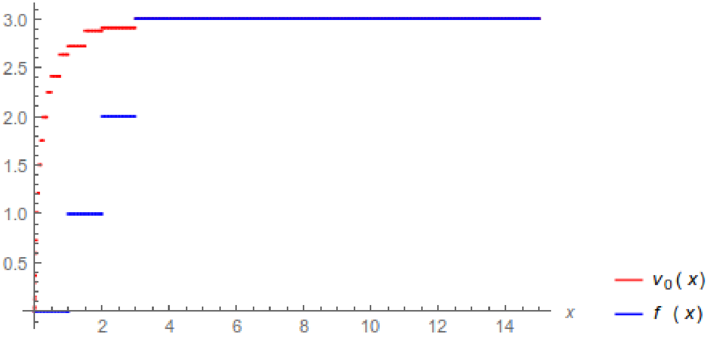
Пример 2. Разрывная функция. Зависимость областей остановки от номера наблюдения.



Линии – области остановки на каждом шаге. Точки – реализация S_n. **Выводы**. 1) Области остановки при каждом $n \in \mathbb{N}_0$ являются полуоткрытыми интервалами. 2) Для данной реализации последовательности $\{S_n\}_{0 \leq n \leq 10}$ оптимальный момент остановки $\tau^* = 7$.

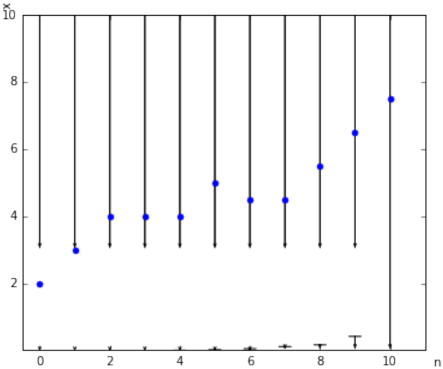
Пример 3. Разрывная функция, 3 состояния.

Пусть
$E = \{-0.5; 0; 1\}, \quad p = (\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}), \quad N = 10, \quad f_n(x) = f(x).$



$D_0 = \{0 < x \leq 0.000976563\} \cup \{3 < x\}$ – область остановки последовательности $\{S_n\}$ в момент времени 0.

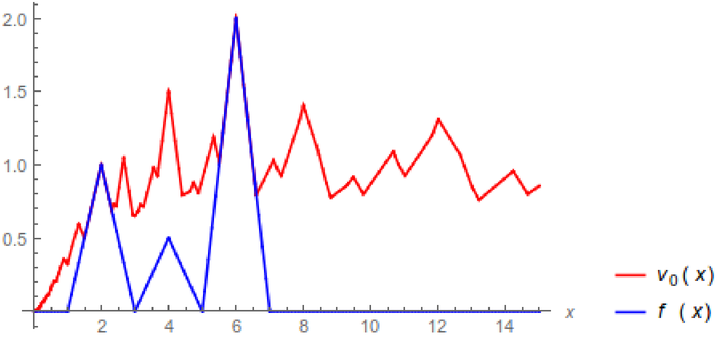
Пример 3. Разрывная функция, 3 состояния. Зависимость областей остановки от номера наблюдения.



Линии – области остановки на каждом шаге. Точки – реализация S_n. **Выводы**. 1) Области остановки при каждом $n \in \mathbb{N}_0$ являются полуоткрытыми интервалами. 2) Для данной реализации последовательности $\{S_n\}_{0 \leq n \leq 10}$ оптимальный момент остановки $\tau^* = 2$.

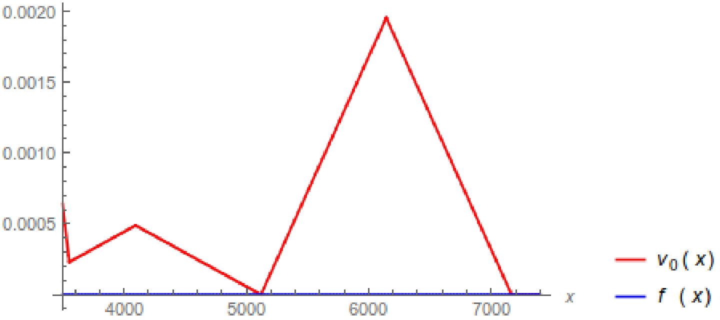
Пример 4. Непрерывная функция с несколькими положительными экстремумами.

Пусть $E = \{a; b\}$, $\quad -1 < a < 0 < b < \infty$, $\quad f_n(x) = f(x) .=$
$-a = b = 0.5$, $\quad p = q = 0.5$, $\quad N = 10$



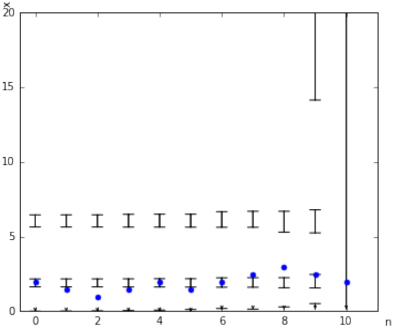
$D_0 = \{0 < x \le 0.0173415\} \cup \{1.5018 \le x \le 2.3159\} \cup \{5.50867 \le x \le 6.60303\} \cup \{x = 5120\} \cup \{7168 \le x\}$

Пример 4. Непрерывная функция с несколькими положительными экстремумами (уменьшеный масштаб).



$D_0 = \{0 < x \leq 0.0173415\} \cup \{1.5018 \leq x \leq 2.3159\} \cup \{5.50867 \leq x \leq 6.60303\} \cup \{x = 5120\} \cup \{7168 \leq x\}$

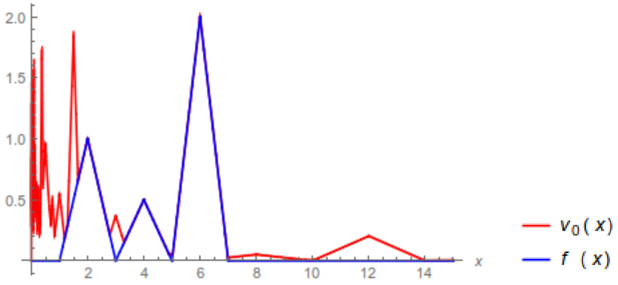
Пример 4. Непрерывная функция с несколькими положительными экстремумами. Зависимость областей остановки от номера наблюдения.



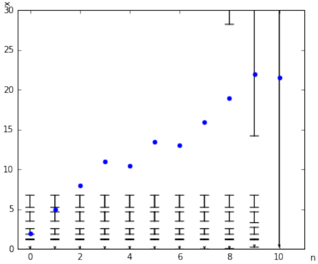
Линии – области остановки на каждом шаге. Точки – реализация S_n. **Выводы**. 1) Области остановки при каждом $n \in \mathbb{N}_0$ являются несвязными областями. 2) Для данной реализации последовательности $\{S_n\}_{0 \le n \le 10}$ оптимальный момент остановки $\tau^* = 0$.

Пример 5. Непрерывная функция с несколькими положительными экстремумами (немартингальная мера).

Пусть $E = \{a; b\}$, $\quad -1 < a < 0 < b < \infty$, $\quad f_n(x) = f(x)$
$a = -0.5$, $b = 3$, $\quad p = 0.1$, $q = 0.9$, $\quad N = 10$.



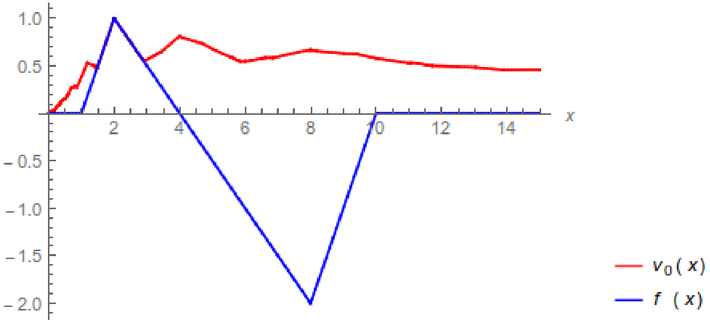
Пример 5. Непрерывная функция с несколькими положительными экстремумами (немартингальная мера). Зависимость областей остановки от номера наблюдения.



Линии – области остановки на каждом шаге. Точки – реализация S_n. **Выводы**. 1) Области остановки при каждом $n \in \mathbb{N}_0$ являются несвязными областями. 2) Для данной реализации последовательности $\{S_n\}_{0 \le n \le 10}$ оптимальный момент остановки $\tau^* = 0$.

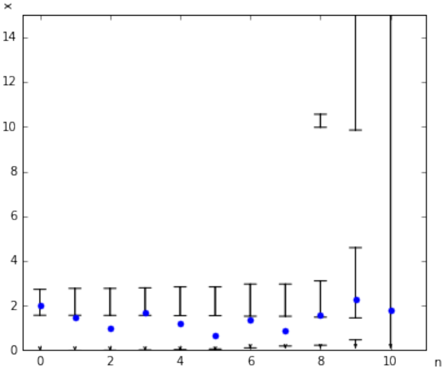
Пример 6. Несколько экстремумов разных знаков.

Пусть $E = \{a; b\}$, $\quad -1 < a < 0 < b < \infty$, $\quad f_n(x) = f(x)$
$a = -0.5$, $b = 0.7$, $\quad p = \frac{7}{12}$, $q = \frac{5}{12}$, $\quad N = 10$.



$D_0 = \{0. < x \leq 0.00496033\} \cup \{1.47067 \leq x \leq 2.84288\} \cup \{2048. \leq x \leq 2730.67\} \cup \{4096 \leq x\}$

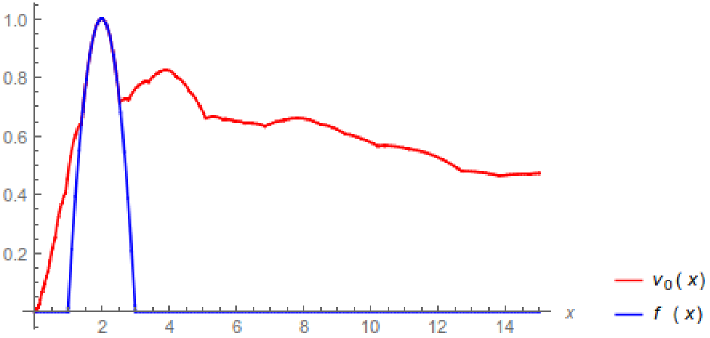
Пример 6. Несколько экстремумов разных знаков. Зависимость областей остановки от номера наблюдения.



Линии – области остановки на каждом шаге. Точки – реализация S_n. **Выводы**. 1) Области остановки при каждом $n \in \mathbb{N}_0$ являются несвязными областями. 2) Для данной реализации последовательности $\{S_n\}_{0 \le n \le 10}$ оптимальный момент остановки $\tau^* = 0$.

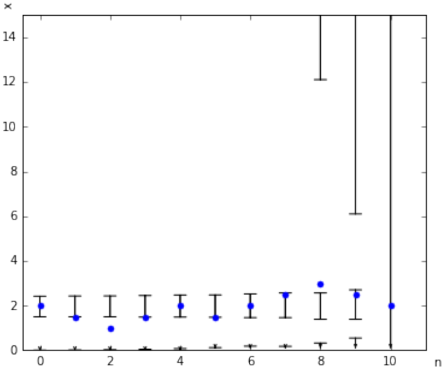
Пример 7. Полуокружность.

Пусть $E = \{a; b\}, \quad -1 < a < 0 < b < \infty, \quad f_n(x) = f(x)$
$-a = b = 0.5, \quad p = q = 0.5, \quad N = 10.$



$D_0 = \{0 < x \leq 0.0173415\} \cup \{1.40176 \leq x \leq 2.53494\} \cup \{3072 \leq x\}$

Пример 7. Полуокружность. Зависимость областей остановки от номера наблюдения.



Линии – области остановки на каждом шаге. Точки – реализация S_n. **Выводы**. 1) Области остановки при каждом $n \in \mathbb{N}_0$ являются несвязными областями. 2) Для данной реализации последовательности $\{S_n\}_{0 \leq n \leq 10}$ оптимальный момент остановки $\tau^* = 0$.

Опираясь на вышеприведённые алгоритм и примеры, установлено следующее утверждение.

Теорема 7 [Е.А. Шелемех (устное сообщение)]. Пусть $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ – однородная марковская последовательность, удовлетворяющая рекуррентному соотношению $S_{n+1} = S_n(1+\rho_{n+1})$, $S_n|_{n=0} = S_0$, где $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ - последовательность бернуливских случайных величин с положительной вероятностью принимающих значения из двухточечного множества $\{a, b\}$, причем: i) $-1 < a < 0 < b < \infty$; ii) $p^* \triangleq \mathrm{P}(\rho_n = a) = \frac{a}{|a|+b}$, $q^* \triangleq \mathrm{P}(\rho_n = b) = 1 - p^*$. Пусть $f(x)$ – непрерывная кусочно-линейная выпуклая функция. Тогда $v_n^N(x)$, являющаяся решением рекуррентного соотношения (2) — непрерывная кусочно-линейная выпуклая функция для любого $n \in \mathbb{N}_0$, а множества остановки D_n для $n = \{0, ..., N-1\}$ являются несвязными множествами, состоящих из интервалов вида $\left(0; \frac{c_1^n}{(1+b)^{N-n}}\right]$, $\left[\frac{c_{i-1}^n}{(1+a)^{N-n}}; \frac{c_i^n}{(1+b)^{N-n}}\right]$, $\left[\frac{c_{T_0}^n}{(1+a)^{N-n}}; \infty\right)$, $i = 2, ..., T_n$, $c_{i-1}^n < c_i^n$.

Приложение 1. Доказательство необходимости в теореме 2.

Необходимость. Докажем, что если $(v_n^N, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ – последовательность урезанных цен, то она удовлетворяет рекуррентному соотношению (5).
1) Докажем, сначала, что для любого $n \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство P-п.н.

$$v_n^N \geq \max\left\{f_n; \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n]\right\}. \tag{7}$$

Сначала заметим, что: i) случайная величина $1_{\{\tau=n\}}f_n$ является $\mathcal{F}_n$-измеримой; ii) условное математическое ожидание обладает телескопическим свойством. Поэтому в силу определения и свойств существенной верхней грани [ЭЛЛИОТТ Р. «Стохастический анализ и его применения», Глава 16] для любого $n \in \mathbb{N}_0$ справедливы соотношения P-п.н.

Приложение 1. Доказательство необходимости в теореме 2.

$$
\begin{aligned}
v_n^N = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \mathsf{E}\left[\sum_{i=n}^{\tau\wedge N} 1_{\{\tau=i\}} f_i | \mathcal{F}_n\right] \geq \\
\geq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{n+1}^N} \left\{ 1_{\{\tau=n\}} f_n + 1_{\{\tau>n\}} \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[\sum_{i=n+1}^{\tau\wedge N} 1_{\{\tau=i\}} f_i | \mathcal{F}_{n+1}\right] | \mathcal{F}_n\right]\right\} = \\
= 1_{\{\tau=n\}} f_n + 1_{\{\tau>n\}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{n+1}^N} \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[f_{\tau\wedge N} | \mathcal{F}_{n+1}\right] | \mathcal{F}_n\right] = \\
= 1_{\{\tau=n\}} f_n + 1_{\{\tau>n\}} \mathsf{E}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{n+1}^N} \mathsf{E}\left[f_{\tau\wedge N} | \mathcal{F}_{n+1}\right] | \mathcal{F}_n\right] = \\
= 1_{\{\tau=n\}} f_n + 1_{\{\tau>n\}} \mathsf{E}\left[v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n\right]. \quad (8)
\end{aligned}
$$

Приложение 1. Доказательство необходимости в теореме 2.

Левая часть полученного неравенства не зависит от момента остановки $\tau \in \mathcal{T}_n^N$. Поэтому если от правой части (8) взять существенную верхнюю грань по $\tau \in \mathcal{T}_n^N$, то получим неравенство (7).
2) Докажем, что P-п.н. справедливо неравенство

$$v_n^N \le \max\left\{f_n; \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n]\right\}. \tag{9}$$

Заметим, что из $\mathcal{F}_n$-измеримости случайной величины $1_{\{\tau=n\}}f_n$, определений существенной верхней грани и случайной величины v_{n+1}^N, а также из телескопического свойства условного математического ожидания следуют неравенства P-п.н.

Приложение 1. Доказательство необходимости в теореме 2.

$$
\begin{aligned}
v_n^N &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \left\{ 1_{\{\tau=n\}} f_n + 1_{\{\tau>n\}} \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[f_{\tau\wedge N}|\mathcal{F}_{n+1}\right]|\mathcal{F}_n\right] \right\} \le \\
&\le \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \left\{ 1_{\{\tau=n\}} f_n + 1_{\{\tau>n\}} \mathsf{E}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{n+1}^N} \mathsf{E}\left[f_{\tau\wedge N}|\mathcal{F}_{n+1}\right]|\mathcal{F}_n \right] \right\} = \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \left\{ 1_{\{\tau=n\}} f_n + 1_{\{\tau>n\}} \mathsf{E}\left[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n \right] \right\} = \max\left\{ f_n ; \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n] \right\}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Очевидно равенство $v_n^N|_{n=N} = \mathsf{E}[f_N^N|\mathcal{F}_N] = f_N$ P-п.н. Отсюда и из неравенств (7), (9) следует рекуррентное соотношение (5).

Приложение 2. Доказательство теоремы 3.

Достаточно доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}_0$ P-п.н. имеет место неравенство $v_n^N \geq \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n]$. Из теоремы 2 следует, что $(v_n^N, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ удовлетворяет (5), которое удобно переписать в виде

$$v_n^N = \begin{cases} f_n, \ \textbf{при} \ f_n \geq \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n] \\ \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n], \ \textbf{при} \ f_n \leq \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n] \end{cases} \geq \tag{11}$$

$$\geq \begin{cases} \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n], \ \textbf{при} \ f_n \geq \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n] \\ \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n], \ \textbf{при} \ f_n \leq \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n] \end{cases} = \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n] \tag{12}$$

Приложение 3. Доказательство теоремы 4.

Пусть $\tau^* = \min\left\{n \in \mathbb{N}_0 : v_n^N = f_n\right\}$. Очевидно, что $v_{\tau^*}^N = f_{\tau^*}$ P-п.н. Предположим, что момент остановки τ^* не является оптимальным, то есть существует момент остановки τ такой, что $\tau \geq \tau^*$.

Заметим, что в силу теоремы 3 последовательность $\{v_n^N\}$ — супермартингал относительно меры P. В силу теоремы Дуба-Мейера для любого $n \in \mathbb{N}_0$ случайная величина v_n^N допускает представление

$$v_n^N = v_0 + M_n - A_n, \tag{13}$$

где M_n — мартингал относительно меры P, а A_n — неубывающая последовательность. Очевидно, что $v_{\tau^*}^N = \sum_{i=0}^N v_i^N 1_{\{\tau^*=i\}}$ и $v_\tau^N = \sum_{i=0}^N v_i^N 1_{\{\tau=i\}}$. Поэтому из (13) имеем $v_{\tau^*}^N = v_0 + M_{\tau^*} - A_{\tau^*}$ и $v_\tau^N = v_0 + M_\tau - A_\tau$ P-п.н. Из этих двух равенств следует равенство

$$v_\tau^N = v_{\tau^*}^N + (M_\tau - M_{\tau^*}) - (A_\tau - A_{\tau^*}) \quad \text{P-п.н..} \tag{14}$$

Приложение 3. Доказательство теоремы 4.

Так как $A_\tau - A_{\tau^*} \geq 0$, то из (14) имеем неравенство

$$v_\tau^N \leq v_{\tau^*}^N + (M_\tau - M_{\tau^*}) \quad \text{P-п.н.} \tag{15}$$

Возьмём условное математическое ожидание $\mathsf{E}\left[.|\mathcal{F}_n\right]$ относительной левой и правой части неравенства (15), имеем P-п.н.

$$\mathsf{E}\left[v_\tau^N|\mathcal{F}_n\right] \leq \mathsf{E}\left[{}_{\tau^*}^N|\mathcal{F}_n\right] = \mathsf{E}\left[f_{\tau^*}|\mathcal{F}_n\right]. \tag{16}$$

Поскольку $\mathsf{E}\left[v_\tau^N|\mathcal{F}_n\right] \geq \mathsf{E}\left[f_\tau^N|\mathcal{F}_n\right]$, то из (16) для любого τ следует неравенство

$$\mathsf{E}\left[f_\tau^N|\mathcal{F}_n\right] \leq \mathsf{E}\left[f_{\tau^*}^N|\mathcal{F}_n\right]. \tag{17}$$

Неравенство (17) является необходимым и достаточным условием оптимальности момента τ^*. Доказательство закончено.

Приложение 4. Доказательство теоремы 5.

1. Достаточность. Пусть последовательность $(v_n^N, \mathcal{F}_n)_{0 \le n \le \tau^* \wedge N}$ — мартингал относительно меры P и $v_n^N|_{n=\tau^*\wedge N} = f_{\tau^*\wedge N}$ P-п.н. Тогда из мартингальности и определения решения следует, что

$$v_0^N = \mathsf{E}\left[v^N_{\tau^*\wedge N}|\mathcal{F}_0\right] = \mathsf{E}\left[f_{\tau^*\wedge N}|\mathcal{F}_0\right]. \tag{18}$$

2. Необходимость. Пусть $\left(\tau^*, v_0^N\right)$ — решение задачи (1). Из доказательства теоремы 2, имеем

$$v_n^N = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N}(1_{\{\tau=n\}}f_n + 1_{\{\tau>n\}}\mathsf{E}\left[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n\right]) =$$

$$= 1_{\{\tau^*=n\}}f_n + 1_{\{\tau^*>n\}}\mathsf{E}\left[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n\right]. \tag{19}$$

Поскольку $v_{\tau^*}^N = f_{\tau^*}$, то отсюда следует $1_{\{\tau^*=n\}}v_n^N = 1_{\{\tau^*=n\}}f_n$.

Приложение 4. Доказательство теоремы 5.

Поэтому из (5) и (19) имеем неравенства

$$v_n^N = \max\left\{f_n; \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n]\right\} \geq \mathsf{E}[v_{n+1}^N|\mathcal{F}_n] = \mathsf{E}[\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{n+1}^N} \mathsf{E}(f_\tau|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n] \geq$$

$$\geq \mathsf{E}[\mathsf{E}(f_{\tau^*}|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathsf{E}[f_{\tau^*}|\mathcal{F}_n]. \quad (20)$$

Возьмём условное математическое ожидание $\mathsf{E}[.|\mathcal{F}_0]$ от обеих частей (20), имеем

$$\mathsf{E}[v_n^N|\mathcal{F}_0] \geq \mathsf{E}[f_{\tau^*}|\mathcal{F}_0] = v_0^N. \quad (21)$$

С другой стороны,

$$v_0^N = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_0^N} \mathsf{E}(f_\tau|\mathcal{F}_0) \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_n^N} \mathsf{E}(f_\tau|\mathcal{F}_n) = v_n^N. \quad (22)$$

Поэтому

$$v_0^N \geq \mathsf{E}(v_n^N|\mathcal{F}_0). \quad (23)$$

Из (21) и (23) следует мартингальность.

Спасибо за внимание